

BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Câu 1:** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

$$\begin{array}{lll} \text{a).} \begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} & \text{b).} \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} & \text{c).} \begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases} \\ \text{d).} \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} & \text{e).} \begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} & \text{f).} \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases} \end{array}$$

LỜI GIẢI

Gọi số hạng đầu là  $u_1$  và công sai là  $d$ .

$$\text{a).} \begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 27 \\ u_1 + 14d = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$\text{b).} \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ u_1 - 2d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$\text{c).} \begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 3d - (u_1 + 5d) = -7 \\ u_1 + 7d - (u_1 + 6d) = 2(u_1 + 3d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\text{d).} \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - (u_1 + 6d) = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4d = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \begin{cases} d = 2 \\ (u_1 + 2)(u_1 + 12) = 75 \quad (*) \end{cases}$$

$$\text{Giải } (*) \Leftrightarrow u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 = -17 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\text{e).} \begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d + u_1 + 14d = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 20d = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ (30 - 10d + 3d)^2 + (30 - 10d + 11d)^2 = 1170 \quad (*) \end{cases}$$

$$\text{Giải } (*): (30 - 7d)^2 + (30 + d)^2 = 1170. \Leftrightarrow 50d^2 - 360d + 630 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{21}{5} \vee d = 3$$

$$\text{Với } d = \frac{21}{5} \Rightarrow u_1 = -12. \text{ Với } d = 3 \Rightarrow u_1 = 0$$

$$f). \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases}$$

Ta có:  $S_3 = 21 \Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 21 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 21 \Leftrightarrow d = 7 - u_1$ .

Ta có:  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 155$

$$\Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + 7 - u_1)^2 + (u_1 + 14 - 2u_1)^2 = 155 \Leftrightarrow u_1^2 + 49 + (14 - u_1)^2 = 155$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 - 28u_1 + 90 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 9 \vee u_1 = 5$$

Với  $u_1 = 9 \Rightarrow d = -2$ . Với  $u_1 = 5 \Rightarrow d = 2$

**Câu 2:** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

$$1) \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases} \quad 7) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases}$$

### LỜI GIẢI

$$1) \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}(2u_1 + 2d) = 12 \\ \frac{5}{2}(2u_1 + 4d) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2d = 8 \\ 2u_1 + 4d = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 9 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 - d \\ (3 - d)^2 + 3^2 + (3 + d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 - d \\ d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 - d \\ d = \pm 2 \end{cases}$$

Với  $d = 2 \Rightarrow u_1 = 1$ . Với  $d = -2 \Rightarrow u_1 = 5$ .

$$3) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 16 \quad (1) \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 84 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (1)  $\Rightarrow u_1 = \frac{16 - 6d}{4} = 4 - \frac{3}{2}d$  thay vào (2) được:

$$\left(4 - \frac{3}{2}d\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}d + d\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}d + 2d\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}d + 3d\right)^2 = 84$$

$$\Leftrightarrow \left(4 - \frac{3}{2}d\right)^2 + \left(4 - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{3d}{2}\right)^2 = 84 \Leftrightarrow 64 + 5d^2 = 84 \Leftrightarrow d^2 = 4 \Leftrightarrow d = \pm 2$$

Với  $d = 2 \Rightarrow u_1 = 1$ .

Với  $d = -2 \Rightarrow u_1 = 7$

$$4) \begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}(2u_1 + 4d) = 5 \Leftrightarrow 2u_1 + 4d = 2 \Rightarrow u_1 = 1 - 2d \quad (1) \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d)(u_1 + 3d)(u_1 + 4d) = 45 \quad (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2):

$$\Leftrightarrow (1-2d)(1-2d+d)(1-2d+2d)(1-2d+3d)(1-2d+4d) = 45$$

$$\Leftrightarrow (1-2d)(1-d)(1+d)(1+2d) = 45 \Leftrightarrow (1-2d)(1+2d)(1-d)(1+d) = 45$$

$$\Leftrightarrow (1-4d^2)(1-d^2) = 45. \text{ Đặt } t = d^2, t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-4t)(1-t) = 45 \Leftrightarrow 4t^2 - 5t - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 4 \text{ (nhận) hoặc } t = -\frac{11}{4} \text{ (loại)} \Leftrightarrow d^2 = 4 \Leftrightarrow d = \pm 2$$

Với  $d = 2 \Rightarrow u_1 = -3$ . Với  $d = -2 \Rightarrow u_1 = 5$ .

$$5) \begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2u_1 + 3d) = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 - \frac{3}{2}d \\ \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d} + \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d + d} + \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d + 2d} + \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d + 3d} = \frac{25}{24} \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left( \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d} + \frac{1}{5 + \frac{3}{2}d} \right) + \left( \frac{1}{5 - \frac{d}{2}} + \frac{1}{5 + \frac{d}{2}} \right) = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{25 - \frac{9d^2}{4}} + \frac{10}{25 - \frac{d^2}{4}} = \frac{25}{24}$$

Đặt:  $\frac{d^2}{4} = t; t \geq 0$ .

$$\Leftrightarrow \frac{10}{25-9t} + \frac{10}{25-t} = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{2(25-t) + 2(25-9t)}{(25-9t)(25-t)} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow \frac{100-20t}{(25-9t)(25-t)} = \frac{5}{24}$$

$$\Leftrightarrow 24(20-4t) = (25-9t)(25-t) \Leftrightarrow 9t^2 - 154t + 145 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{145}{9} \vee t = 1$$

$$\bullet t = \frac{145}{9} \Leftrightarrow d^2 = \frac{145}{9} \Rightarrow d = \pm \frac{\sqrt{145}}{3}$$

$$\text{Với } d = \frac{\sqrt{145}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 - \frac{\sqrt{145}}{2}. \text{ Với } d = -\frac{\sqrt{145}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 + \frac{\sqrt{145}}{2}$$

$$\bullet t = 1 \Leftrightarrow d^2 = 1 \Leftrightarrow d = \pm 1$$

$$\text{Với } d = 1 \Rightarrow u_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}. \text{ Với } d = -1 \Leftrightarrow u_1 = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}.$$