

b) Chứng minh rằng khi  $x$  và  $y$  trái dấu thoả mãn điều kiện  $x \neq y + 1$  thì giá trị của biểu thức  $Q$  luôn luôn không âm.

**Giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } Q &= \frac{1 - x^2 - y^2 + 2xy}{2xy} \cdot \frac{x - y + 1}{x - y} \cdot \frac{x - y - 1}{x - y} = \frac{1 - (x - y)^2}{2xy} \cdot \frac{x - y + 1}{x - y} \cdot \frac{x - y}{x - y - 1} \\ &= \frac{(1 - x + y)(1 + x - y)}{2xy} \cdot \frac{x - y + 1}{x - y - 1} = -\frac{(x - y + 1)^2}{2xy}. \end{aligned}$$

b) Vì  $x$  và  $y$  là hai số trái dấu nên các giá trị các mẫu thức  $2xy$ ,  $x - y$  đều khác 0. Mặt khác do  $x \neq y + 1$  nên giá trị mẫu thức  $x - y - 1 \neq 0$ .

Ta có  $-(x - y + 1)^2 \leq 0$ ;  $2xy < 0$  nên  $Q \geq 0$ .

## C. BÀI TẬP

1. Cho biểu thức

$$A = \frac{1}{(x-y)^3} \left( \frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right) + \frac{3}{(x-y)^4} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{6}{(x-y)^5} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right).$$

Chứng minh rằng  $A$  là lập phương của một biểu thức hữu tỉ.

2. Chứng minh rằng với những giá trị thích hợp của biến thì các biểu thức sau có giá trị là hằng số:

$$\text{a) } A = \left( \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} \right) \cdot \left( \frac{x+y}{x-y} - \frac{2}{x^2-y^2} \right);$$

$$\text{b) } B = \frac{(x+y)^2}{x} \cdot \left[ \frac{x}{(x+y)^2} - \frac{x}{x^2-y^2} \right] - \frac{5x-3y}{y-x}.$$

3. Chứng minh rằng với những giá trị thích hợp của biến thì các biểu thức sau có giá trị bằng nhau:

$$M = \frac{\left(\frac{x}{y}+1\right)^2}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}} \cdot \frac{1-\frac{x^3}{y^3}}{\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y}+1} : \frac{\frac{x^3}{y^3}+1}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1};$$

$$N = \left(\frac{x}{x^2-36} - \frac{x+6}{x^2-6x}\right) : \frac{2x+6}{x^2-6x} - \frac{x}{x+6}.$$

4. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \left(\frac{x^2+xy+y^2}{x+y} + \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\right) : \left(x+y + \frac{y^2}{x-y}\right) = \frac{2x}{x+y};$$

$$b) \left[\frac{x+2}{x+1} - \frac{4(y+1)}{y+2}\right] : \left[\frac{x^2(y+1)}{x+1} - \frac{y^2(x+2)}{y+2}\right] = \frac{1}{y-x}.$$

5. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{y^2-yz+z^2}{x} + \frac{x^2}{y+z} - \frac{3yz}{y+z}\right) \cdot \frac{2xy+2xz}{x+y+z} + (x+y+z)^2,$$

trong đó  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ,  $x \neq 0$ ;  $y+z \neq 0$  và  $x+y+z \neq 0$ .

Chứng minh rằng  $A: 3$ .

$$6. \text{ Cho biểu thức } B = \left(\frac{y^2-yz+z^2}{x} + \frac{x^2}{y+z} - \frac{3yz}{y+z}\right) \cdot \frac{2xy+2xz}{x+y+z} + (x+y+z)^2,$$

trong đó  $xyz \neq 0$  và  $x+y+z \neq 0$ .

Chứng minh rằng biểu thức  $B$  có giá trị không âm.

7. Cho biểu thức

$$M = \left[\frac{1}{1+2x-2y} + 2(x-y) - 1\right] : \left(2x - 2y - \frac{4x^2-8xy+4y^2}{2x-2y+1}\right)$$

trong đó  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Chứng minh rằng giá trị của  $M$  là một số chẵn với  $x, y$  là, cho  $M$  có nghĩa.

8. Cho biểu thức

$$N = \left( \frac{x-1}{(x-1)^2+x} - \frac{2}{x-2} \right) : \left( \frac{(x-1)^4+2}{(x-1)^3-1} - x + 1 \right), \text{ trong đó } x \text{ là số nguyên.}$$

Chứng minh rằng với mọi giá trị thích hợp của  $x$  thì giá trị của  $N$  luôn là một số nguyên.

9. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{x^2}{x+4} \cdot \left( \frac{x^2+16}{x} + 8 \right) + 9$ .

10. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \left( \frac{x^3+8}{x^3-8} \cdot \frac{4x^2+8x+16}{x^2-4} - \frac{4x}{x-2} \right) : \frac{-16}{x^4-6x^3+12x^2-8x}.$$