4/25. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một CSN, hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ hai mươi lăm của một CSC. Tìm các số đó.

LỜI GIẢI

Gọi u_1, u_2, u_3 là ba số hạng liên tiếp của CSN, với công bội là q.

Theo đề bài $u_1 = a_1, u_2 = a_4, u_3 = a_{25}$, với a_1, a_4, a_{25} là các số hạng của một cấp số cộng với công sai d.

Ta có $\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d \\ a_{25} = a_1 + 24d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a_4 = 8a_1 + 24d & (1) \\ a_{25} = a_1 + 24d & (2) \end{cases}$. Lấy phương trình $(1)-(2)$ được:

$8a_4 - a_{25} = 7a_1 \Leftrightarrow 8u_2 - u_3 = 7u_1 \Leftrightarrow 8u_1q - u_1q^2 = 7u_1 \Leftrightarrow q^2 - 8q + 7 = 0 \Leftrightarrow q = 1 \vee q = 7$

Vì u_1, u_2, u_3 khác nhau nên chọn $q = 7$.

Theo đề bài có: $u_1 + u_2 + u_3 = 114 \Leftrightarrow u_1 + u_1q + u_1q^2 = 114 \Leftrightarrow u_1\left(1 + q + q^2\right) = 114 \Rightarrow u_1 = 2$

Kết luận ba số cần tìm: $u_1 = 2, u_2 = 14, u_3 = 98$.

6/25. Ba số khác nhau có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một CSN hoặc là các số hạng thứ 2 thứ 9 và thứ 44 của một CSC. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu tiên của CSC để tổng của chúng là 820?

LỜI GIẢI

Gọi u_1, u_2, u_3 là ba số hạng liên tiếp của CSN, với công bội là q.

Theo đề bài $u_1 = a_2, u_2 = a_9, u_3 = a_{44}$, với a_2, a_9, a_{44} là các số hạng của một cấp số cộng với công sai d.

Ta có $\begin{cases} a_9 = a_2 + 7d \\ a_{44} = a_2 + 42d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a_9 = 6a_2 + 42d & (1) \\ a_{44} = a_2 + 42d & (2) \end{cases}$. Lấy phương trình $(1)-(2)$ được:

$6a_9 - a_{44} = 5a_2 \Leftrightarrow 6u_2 - u_3 = 5u_1 \Leftrightarrow 6u_1q - u_1q^2 = 5u_1 \Leftrightarrow q^2 - 6q + 5 = 0 \Leftrightarrow q = 1 \vee q = 5$

Vì u_1, u_2, u_3 khác nhau nên chọn $q = 5$.

Theo đề bài có: $u_1 + u_2 + u_3 = 217 \Leftrightarrow u_1 + u_1q + u_1q^2 = 217 \Leftrightarrow u_1\left(1 + q + q^2\right) = 217 \Rightarrow u_1 = 7$

Suy ra $u_2 = u_1q = 35$.

Ta có $\begin{cases} a_2 = 7 \\ a_9 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 7 \\ a_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

Theo đề bài ta có $S_n = 820 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\left[2a_1 + \left(n-1\right)d\right] = 820$

$\Leftrightarrow n\left(6 + 4n - 4\right) = 1640 \Leftrightarrow 4n^2 + 2n - 1640 = 0 \Leftrightarrow n = 20$

Kết luận phải lấy 20 số hạng đầu tiên để tổng của chúng bằng 820.

7/25. Một CSN và CSN đều có số hạng đầu tiên là bằng 5, số hạng thứ hai của CSC lớn hơn số hạng thứ hai của CSN là 10, còn các số hạng thứ 3 của hai cấp số thì bằng nhau. Tìm cấp số đó.

LỜI GIẢI

Gọi u_1, u_2, u_3 là ba số hạng đầu tiên liên tiếp của CSC, với công sai d.

Gọi a_1, a_2, a_3 là ba số hạng đầu tiên liên tiếp của CSN, với công bội q.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} u_1 = a_1 = 5 \\ u_2 - a_2 = 10 \\ u_3 = a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = a_1 = 5 \\ u_1 + d - a_1q = 10 \\ u_1 + 2d = a_1q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = a_1 = 5 \\ 5 + d - 5q = 10 \\ 5 + 2d = 5q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = a_1 = 5 \\ d = 5 + 5q & (2) \\ 5 + 2d = 5q^2 & (3) \end{cases}$

Thế (2) vào (3) được: $q^2 - 2q - 3 = 0 \Leftrightarrow q = 3 \vee q = -1$

Với $q = 3 \Rightarrow d = 20$. Vậy $u_1 = 5, u_2 = 25, u_3 = 45$ và $a_1 = 5, a_2 = 15, a_3 = 45$.

Với $q = -1 \Rightarrow d = 0$. Vậy $u_1 = u_2 = u_3 = 5$ và $a_1 = 5, a_2 = -5, a_3 = 5$.

9/25. 1). Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN với công bội $q(q \neq 1)$, đồng thời các số x, 2y, 3z theo thứ tự đó lập thành một CSC với công sai $d(d \neq 0)$. Hãy tìm q và d.

LỜI GIẢI

Ta có $x + 3z = 2.2y \Leftrightarrow x + 3xq^2 = 4xq \Leftrightarrow 3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow q = \dfrac{1}{3}$.

3). Các số $x+6y, 5x+2y, 8x+y$ theo thứ tự đó thành lập một CSC. Đồng thời các số $x-1, y+2, x-3y$ theo thứ tự đó lập thành CSN. Hãy tìm x và y.

LỜI GIẢI

Dựa vào tính chất của CSC và CSN ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+6y)+(8x+y)=2(5x+2y)\\(x-1)(x+3y)=(y+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3y & (1)\\(x-1)(x-3y)=(y+2)^2 & (2)\end{cases}$$

Thay (1) vào (2) được: $(3y-1)6y = (y+2)^2 \Leftrightarrow 17y^2 - 10y - 4 = 0$

4). Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN. Ba số x, $y-4$, z theo thứ tự đó lập thành CSN. Đồng thời các số x, $y-4$, $z-9$ theo thứ tự đó lập thành CSC. Tìm x, y, z?

LỜI GIẢI

Dựa vào tính chất của CSC và CSN ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x.z = y^2 & (1)\\x.z = (y-4)^2 & (2)\\x+(z-9) = 2(y-4) & (3)\end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có $y^2 = (y-4)^2 \Leftrightarrow 16 - 8y = 0 \Leftrightarrow y = 2$

Thay y = 2 vào (3) được: $x + z = 5$. Có $x + z = 5$ và $x.z = 4$ suy ra giá trị của x và z là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 5X + 4 = 0 \Leftrightarrow X = 4 \vee X = 1$

$\Rightarrow x = 4, z = 1 \vee x = 1, z = 4$

Có 2 bộ (x,y,z) thỏa yêu cầu là (1,2,4) và (4,2,1).