

BÀI GIẢI

Câu 1: (2 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $3x^2 - 17x + 10 = 0$ (1)

Giải:

Ta có $\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 289 - 120 = 169 > 0$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{17+13}{2 \cdot 3} = 5; x_2 = \frac{17-13}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S = \left\{ 5; \frac{2}{3} \right\}$

b) $2x^2 - \sqrt{5}x + \sqrt{5} - 2 = 0$ (2)

Giải:

Ta có $a+b+c = 2 + (-\sqrt{5}) + (\sqrt{5} - 2) = 0$ nên phương trình (2) có 2 nghiệm:

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5} - 2}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là: $S = \left\{ 1; \frac{\sqrt{5} - 2}{2} \right\}$

c) $5x^4 - 43x^2 - 18 = 0$ (3)

Giải:

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$)

Phương trình (3) trở thành: $5t^2 - 43t - 18 = 0$ (*)

Ta có $\Delta = (-43)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-18) = 1849 + 360 = 2209 > 0$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{2209} = 47$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$t_1 = \frac{43+47}{2 \cdot 5} = 9 \text{ (nhận)}; t_2 = \frac{43-47}{2 \cdot 5} = \frac{-2}{5} \text{ (loại)}$$

Với $t_1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Vậy tập nghiệm của phương trình (3) là: $S = \{-3; 3\}$

d) $\begin{cases} 3x - 4y = 32 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ (4)

Giải:

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 12y = 96 \\ 16x + 12y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x = 100 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 16 + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình (4) là: $(x; y) = (4; -5)$

Câu 2: (1,5 điểm) Cho (P): $y = -\frac{1}{2}x^2$ và (D): $y = -x - 4$

a) Vẽ đồ thị (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ

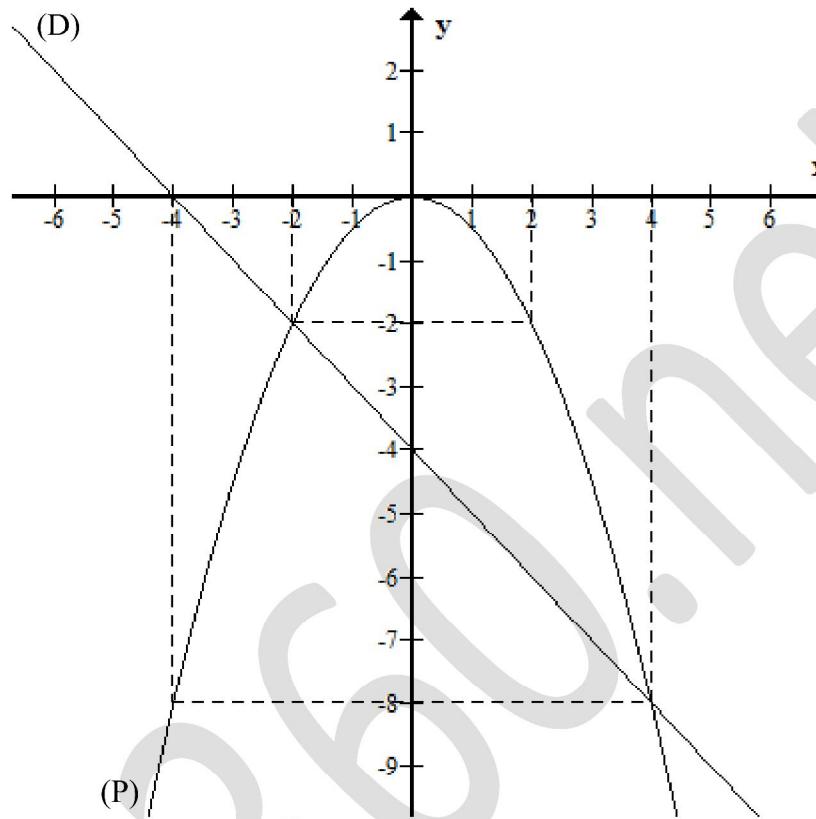
Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-8	-2	0	-2	-8

x	0	-4
y = -x - 4	-4	0

Vẽ đồ thị



b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) bằng phép toán

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) có dạng: $-\frac{1}{2}x^2 = -x - 4$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{-x^2}{2} &= \frac{-2x}{2} - \frac{8}{4} \\ \Leftrightarrow -x^2 &= -2x - 8 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 &= 0 \quad (5) \end{aligned}$$

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-8) = 1 + 8 = 9 > 0$; $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{9} = 3$

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình (5) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{1+3}{1} = 4; x_2 = \frac{1-3}{1} = -2$$

+ Với $x_1 = 4$ ta có $y_1 = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 = -8$

+ Với $x_2 = -2$ ta có $y_2 = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = -2$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (D) là: A(4; -8), B(-2; -2)

Câu 3: (1,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức sau: $A = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + 2}{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} - 2}} - 2\sqrt{6}$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + 2}{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} - 2}} - 2\sqrt{6} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + 2}{\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} - 2}} - 2\sqrt{6} = \sqrt{\frac{\frac{3\sqrt{6}}{6} + \frac{2\sqrt{6}}{6} + \frac{12}{6}}{\frac{3\sqrt{6}}{6} + \frac{2\sqrt{6}}{6} - \frac{12}{6}}} - 2\sqrt{6} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{5\sqrt{6} + 12}{6}}{\frac{5\sqrt{6} - 12}{6}}} - 2\sqrt{6} = \sqrt{\frac{5\sqrt{6} + 12}{5\sqrt{6} - 12}} - 2\sqrt{6} = \sqrt{\frac{(5\sqrt{6} + 12)^2}{(5\sqrt{6} - 12)(5\sqrt{6} + 12)}} - 2\sqrt{6} \\ &= \sqrt{\frac{(5\sqrt{6} + 12)^2}{150 - 144}} - 2\sqrt{6} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{6} + 12}{\sqrt{6}}\right)^2} - 2\sqrt{6} = \sqrt{(5 + 2\sqrt{6})^2} - 2\sqrt{6} = |5 + 2\sqrt{6}| - 2\sqrt{6} \\ &= 5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 5 \quad (\text{vì } 5 + 6\sqrt{6} > 0) \end{aligned}$$

- b) Ông A vay ngân hàng 100 triệu lãi suất 12%/năm. Ông A muốn hoàn nợ theo cách sau: đúng 1 tháng sau ngày vay ông hoàn nợ: ông trả 10 triệu/tháng. Hỏi sau 3 tháng kể từ ngày vay. Ông A còn nợ ngân hàng bao nhiêu?

Giải:

Số tiền cả vốn lẫn lãi ông A phải trả sau 1 năm là:

$$10000000(1+12\%) = 112000000 \text{ (đồng)}$$

Số tiền ông A trả sau 3 tháng là: $3.10000000 = 30000000$ (đồng)

Vậy số tiền mà ông A còn nợ ngân hàng là: $112000000 - 30000000 = 82000000$ (đồng)

Câu 4: (1,5 điểm) Cho phương trình: $3x^2 - 2mx - 3 = 0$ (m là tham số)

- a) Tìm m để phương trình trên có nghiệm

Giải:

$$\text{Ta có: } \Delta' = (-m)^2 - 3 \cdot (-3) = m^2 + 9 > 0, \forall m$$

Do $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m

- b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để $3x_1x_2 + 2x_2 - x_1x_2^2 = m + 3$

Giải:

Theo câu a, $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 (với mọi m) thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2m}{3} = \frac{2m}{3} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{3} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } 3x_1x_2 + 2x_2 - x_1x_2^2 = m + 3$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (-1) + 2x_2 - (-1)x_2 = m + 3 \quad (\text{do hệ thức Vi-ét})$$

$$\Leftrightarrow -3 + 2x_2 + x_2 = m + 3$$

$$\Leftrightarrow 3x_2 = m + 6$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{m+6}{3}$$

Thay $x_2 = \frac{m+6}{3}$ vào hệ thức Vi-ét ta được:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{m+6}{3} = \frac{2m}{3} \\ x_1 \cdot \frac{m+6}{3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2m}{3} - \frac{m+6}{3} = \frac{m-6}{3} \\ x_1 \cdot \frac{m+6}{3} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m-6}{3} \cdot \frac{m+6}{3} = -1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 36 = -3$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 33$$

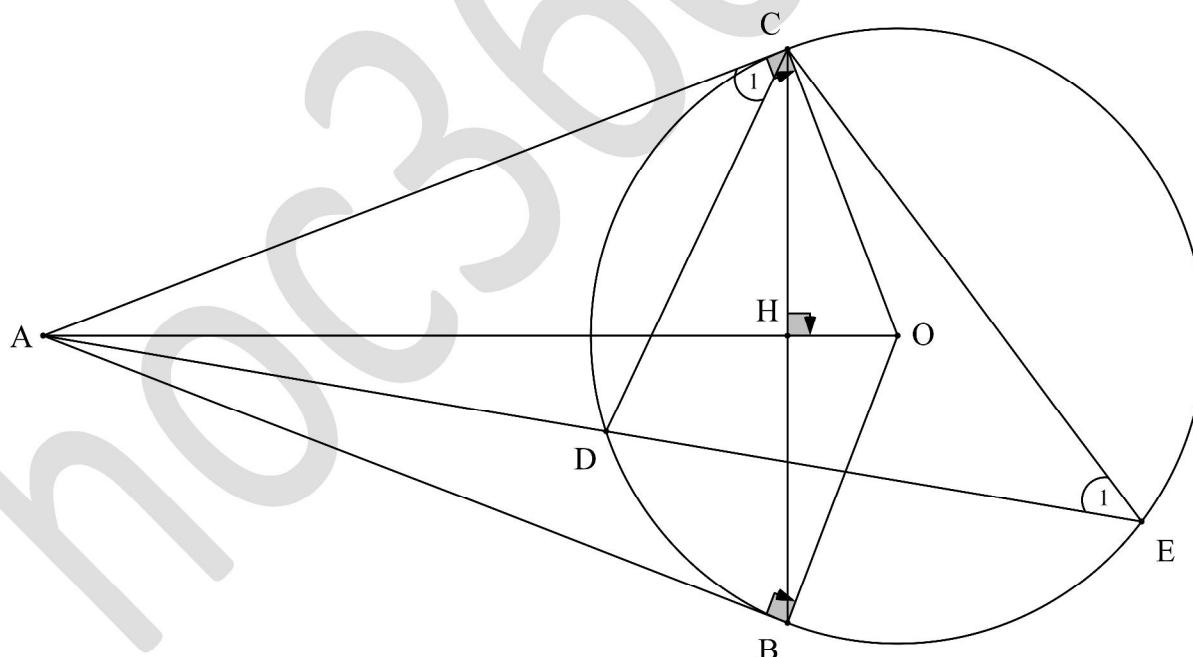
$$\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{33}$$

Vậy $m = \pm\sqrt{33}$ là các giá trị cần tìm

Câu 5: (3,5 điểm) Qua điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A vẽ 2 tiếp tuyến AB và AC (B và C là 2 tiếp điểm) và vẽ cát tuyến ADE của (O) sao cho tâm O nằm trong góc EAC

- a) Chứng minh $OA \perp BC$ tại H và $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

Giải:



Ta có $AB = AC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$$OB = OC = R$$

$\Rightarrow AO$ là đường trung trực của đoạn thẳng BC

$\Rightarrow AO \perp BC$ tại H

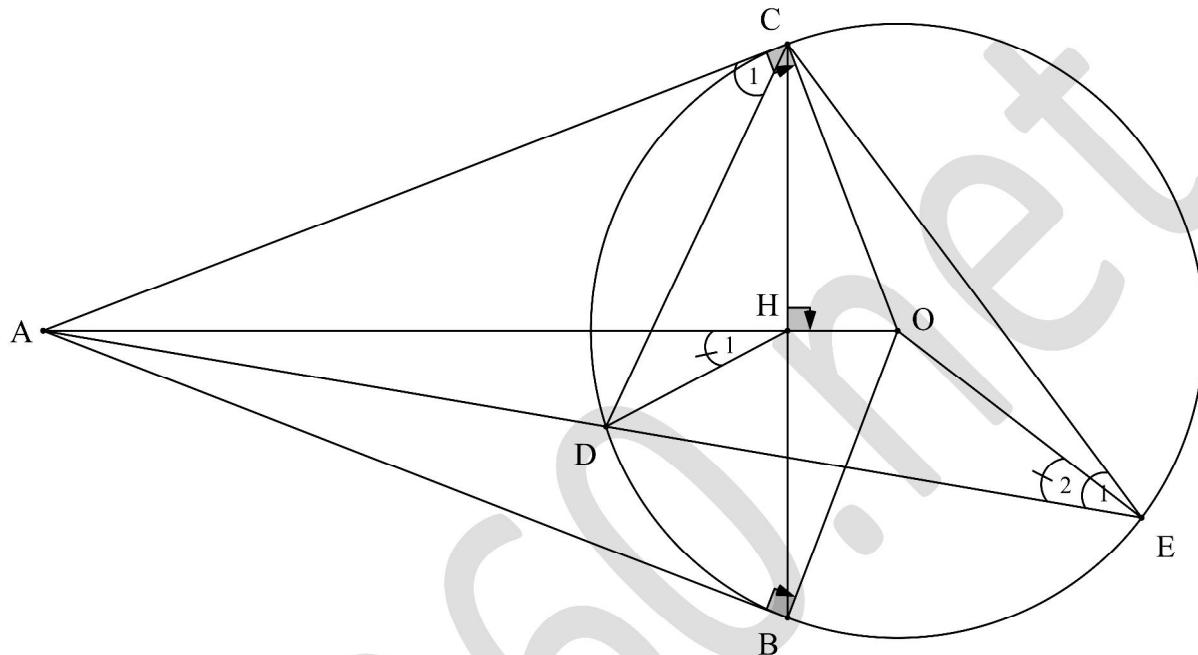
Xét ΔACD và ΔAEC có:

$\hat{C}AD$: chung

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 &= \hat{E}_1 \text{ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)} \\ \Rightarrow \Delta ACD &\sim \Delta AEC \text{ (g.g)} \\ \Rightarrow \frac{AC}{AE} &= \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow AC \cdot AC = AD \cdot AE \Leftrightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE \quad (1) \text{ (vì } AC = AB) \end{aligned}$$

b) Chứng minh tứ giác OHDE nội tiếp

Giải:



Ta có ΔACO vuông tại C và có CH là đường cao

$$\Rightarrow AC^2 = AH \cdot AO \quad (2) \text{ (hệ thức lượng)}$$

Từ (1) và (2) \Rightarrow AD.AE = AH.AO (3)

Xét ΔAHD và ΔAEO có:

DÂH : chung

$$\frac{AD}{AO} = \frac{AH}{AE} \text{ (do (3))}$$

$\Rightarrow \Delta AHD \sim \Delta AEO$ (c.g.c)

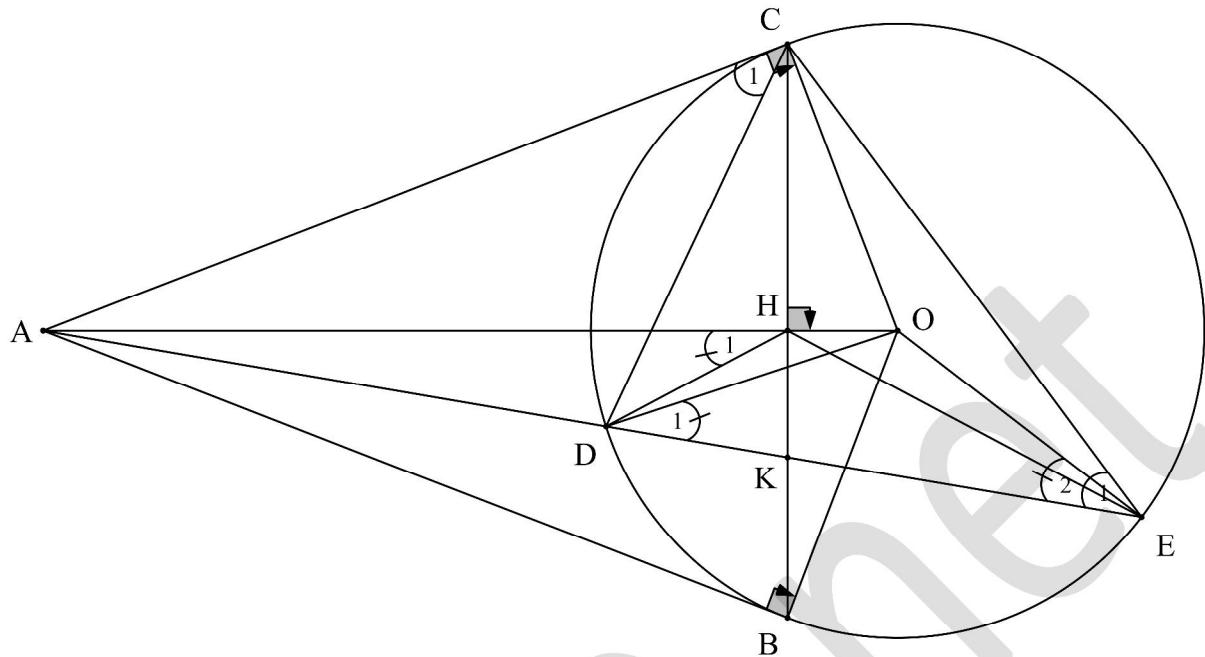
$\Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{E}_2$ (4) (2 góc tương ứng)

Xét tứ giác OHDE có: $\hat{H}_1 = \hat{E}_2$ (do (4))

⇒ Tứ giác OHDE nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

c) Gọi K là giao điểm của DE và BC. Chứng minh: $AD \cdot KE = AE \cdot KD$

Giải:



$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \hat{D}HK &= 90^\circ - \hat{H}_1 \quad (\text{2 góc phụ nhau}) \\
 &= 90^\circ - \hat{E}_2 \quad (\text{do (4)}) \\
 &= \frac{180^\circ - 2\hat{E}_2}{2} \\
 &= \frac{180^\circ - \hat{E}_2 - \hat{D}_1}{2} \quad (\text{vì } OD = OE = R \text{ nên } \Delta ODE \text{ cân tại } O \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{D}_1) \\
 &= \frac{\hat{D}OE}{2} \quad (\text{tổng 3 góc trong } \Delta ODE) \\
 &= \frac{\hat{D}HE}{2} \quad (\text{cùng chắn cung } DE \text{ của tứ giác OHDE nội tiếp})
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow HK$ là phân giác của DHE

$$\Rightarrow \frac{KD}{KE} = \frac{HD}{HE} \quad (5)$$

Ta có $AH \perp HB$ (vì $AO \perp BC$)

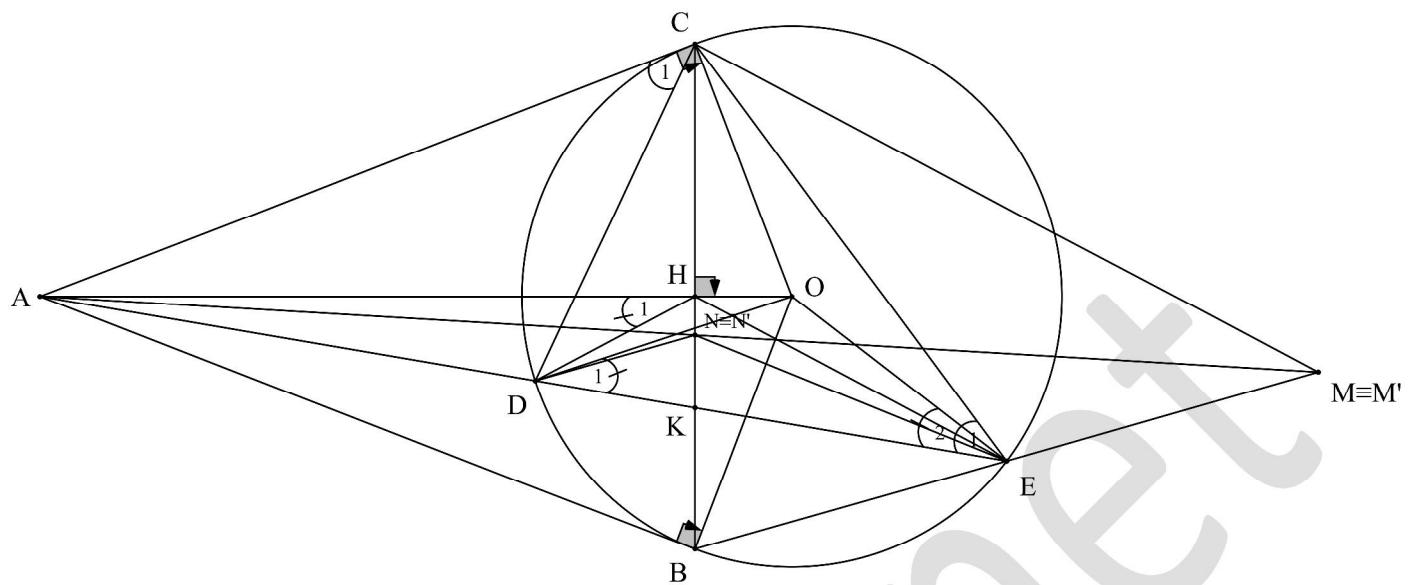
$\Rightarrow AH$ là phân giác của ngoài của DHE

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{HD}{HE} \quad (6)$$

$$\text{Từ (5) và (6)} \Rightarrow \frac{KD}{KE} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow AE \cdot KD = AD \cdot KE$$

- d) Gọi M là điểm đối xứng của B qua E. AM cắt BC tại N. Chứng minh: $ND // BM$

Giải:



Kẻ $DN' \parallel BM$ (N' thuộc BC)

Gọi M' là giao điểm của AN' và BM

Ta có $DN' \parallel BE$ (vì $DN' \parallel BM$)

$$\Rightarrow \frac{DN'}{BE} = \frac{KD}{KE} \quad (7) \text{ (hệ quả Talet)}$$

Ta có $DN' \parallel EM'$ (vì $DN' \parallel BM$)

$$\Rightarrow \frac{DN'}{EM'} = \frac{AD}{AE} \quad (8) \text{ (hệ quả Talet)}$$

Ta có $AE \cdot KD = AD \cdot KE$ (do trên)

$$\Rightarrow \frac{KD}{KE} = \frac{AD}{AE} \quad (9)$$

$$\text{Từ (7), (8) và (9)} \Rightarrow \frac{DN'}{BE} = \frac{DN'}{EM'} \Leftrightarrow BE = EM'$$

$\Rightarrow M'$ đối xứng với B qua E

Mà M đối xứng với B qua E (gt)

$$\Rightarrow M' \equiv M$$

Ta có N' thuộc BC và AM'

Hay N' thuộc BC và AM (vì $M' \equiv M$)

Mà N thuộc BC và AM (gt)

$$\Rightarrow N' \equiv N$$

Vậy $DN \parallel BM$