BÀI GIẢI

Câu 1:

a) Giải phương trình: $x(x+3)=15-(3x-1)$ (1)

Giải:

$(1)\Leftrightarrow x^2+3x=15-3x+1$

$\Leftrightarrow x^2+3x-15+3x-1=0$

$\Leftrightarrow x^2+6x-16=0$

Ta có $\Delta'=3^2-1.(-16)=9+16=25>0;\sqrt{\Delta'}=\sqrt{25}=5$

Do $\Delta'>0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-3+5}{1}=2;x_2=\frac{-3-5}{1}=-8$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\{2;-8\}$

b) Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi 40m và chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Tính diện tích của miếng đất

Giải:

Gọi x (m) là chiều dài và y (m) là chiều rộng của hình chữ nhật (x > y > 0)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2(x+y)=40\\x=3y\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=20\\x-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+3y=60\\x-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=60\\x-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=15\\15-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=15\\y=5\end{cases}\text{ (thỏa)}$$

Diện tích của miếng đất là: $S=xy=15.5=75(m^2)$

Câu 2:

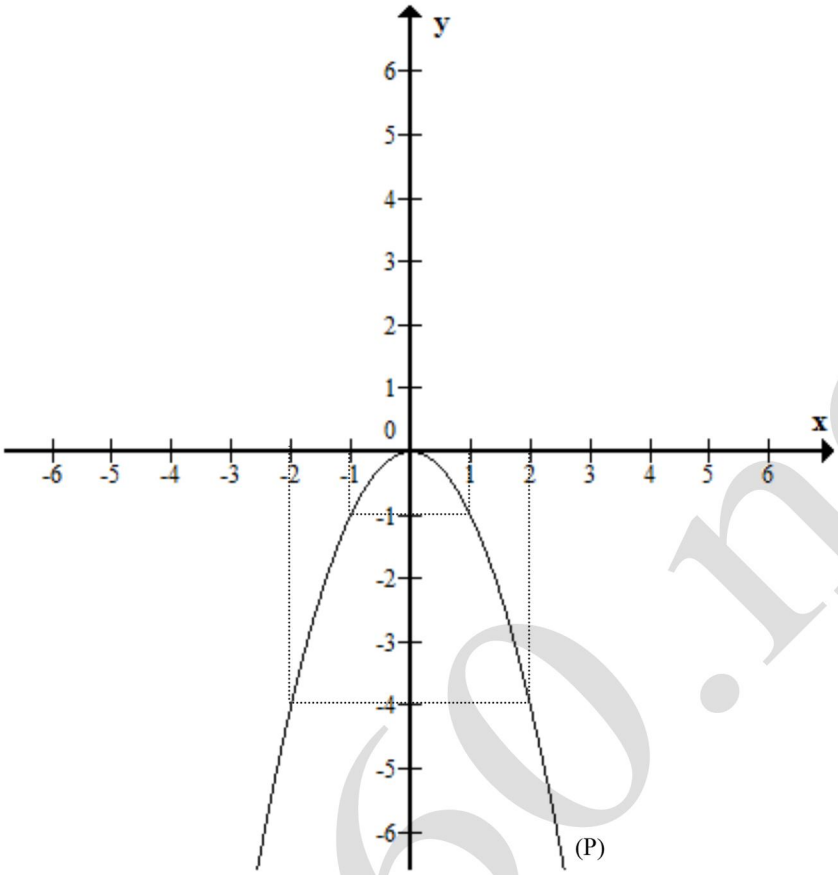
a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y=-\frac{x^2}{4}$

Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y=-\frac{x^2}{4}$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị



b) Tìm m để (P) cắt đường thẳng $(D): y = 2x - m$ tại điểm có hoành độ x = 1

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) có dạng: $-\frac{x^2}{4} = 2x - m$

Do (D) cắt (P) tại điểm có hoành độ x = 1 nên thỏa: $-\frac{1^2}{4} = 2.1 - m \Leftrightarrow m = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

Vậy $m = \frac{9}{4}$ là giá trị cần tìm

Câu 3:

a) Thu gọn biểu thức: $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

Giải:

Ta có $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \left|\sqrt{3}+1\right| - \left|\sqrt{3}-1\right| = \left(\sqrt{3}+1\right) - \left(\sqrt{3}-1\right) = \sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1 = 2$

(vì $\sqrt{3}+1 > 0; \sqrt{3}-1 > 0$)

b) Giá bán một chiếc Tivi giảm giá hai lần, mỗi lần giảm 10% so với giá đang bán, sau khi giảm giá 2 lần đó thì giá còn lại là 16.200.000 đồng. Vậy giá bán ban đầu của Tivi là bao nhiêu?

Giải:

Gọi x (đồng) là giá bán ban đầu của Tivi (x > 0)

Giá bán được giảm lần thứ nhất là: $(100\% - 10\%).x = 90\%x$ (đồng)

Giá bán được giảm lần thứ hai là: $(100\% - 10\%).90\%x = 90\%.90\%.x$ (đồng)

Theo đề bài, ta có phương trình: $90\%.90\%x = 16200000 \Leftrightarrow x = 20000000$ (nhận)

Vậy giá bán ban đầu là của Tivi là: 20.000.000 (đồng)

Câu 4: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (1) (x là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m

Giải:

Ta có $\Delta' = (-m)^2 - 1.(m-2) = m^2 - m + 2 = \left(m^2 - 2.m.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2$

$= \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0, \forall m$ (vì $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall m$)

Do $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m

b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) thỏa mãn:

$$(1 + x_1)(2 - x_2) + (1 + x_2)(2 - x_1) = x_1^2 + x_2^2 + 2$$

Giải:

Theo câu a, với mọi m thì phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2m}{1} = 2m \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{1} = m - 2 \end{cases}$$

Ta có: $(1 + x_1)(2 - x_2) + (1 + x_2)(2 - x_1) = x_1^2 + x_2^2 + 2$

$\Leftrightarrow 2 - x_2 + 2x_1 - x_1x_2 + 2 - x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (2m)^2 - 2m - 2 = 0$ (do hệ thức Vi-ét)

$\Leftrightarrow 4m^2 - 2m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0$ (*)

Ta có $a + b + c = 2 + (-1) + (-1) = 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm:

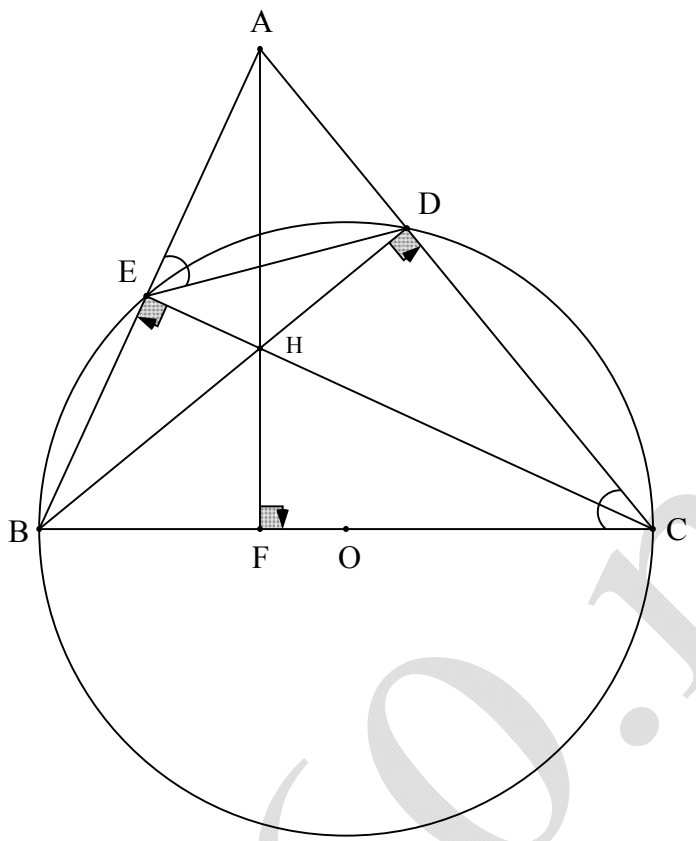
$m_1 = 1; m_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2}$

Vậy $m_1 = 1; m_2 = \frac{-1}{2}$ là các giá trị cần tìm

Câu 5: Cho tam giác ABC (AB < AC) có ba góc nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại D, E. Gọi H là giao điểm của BD và CE; F là giao điểm của AH và BC

a) Chứng minh: $AF \perp BC$ và $A\hat{F}D = A\hat{C}E$

Giải:



Ta có $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow$ BD $\perp$ AC, CF $\perp$ AB

Xét ΔABC có: BD và CE là 2 đường cao cắt nhau tại H

$\Rightarrow$ H là trực tâm của ΔABC

$\Rightarrow$ AH $\perp$ BC tại F

Xét tứ giác HFCD có:

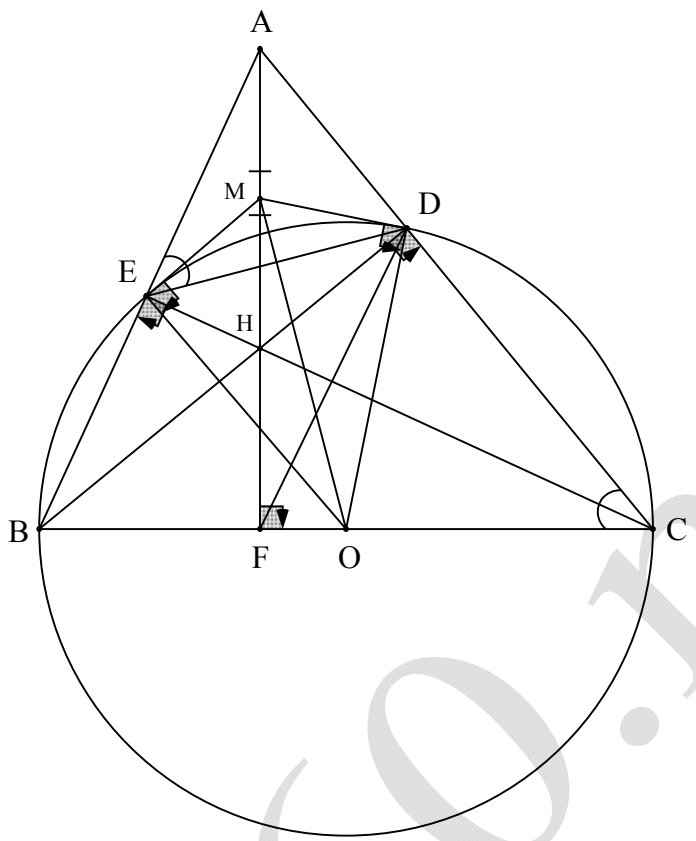
$\widehat{HFC} + \widehat{HDC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ (vì AH $\perp$ BC, BD $\perp$ AC)

$\Rightarrow$ Tứ giác HFCD nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

$\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{ACE}$ (cùng chắn cung HD)

b) Gọi M là trung điểm của AH. Chứng minh: MD $\perp$ OD và 5 điểm M, D, O, F, E cùng thuộc một đường tròn

Giải:



Ta có ΔADH vuông tại D và có DM là trung tuyến

$\Rightarrow$ MD = MA = MH (1)

Ta có ΔAEH vuông tại E và có EM là trung tuyến

$\Rightarrow$ ME = MA = MH (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ MD = ME (3)

Xét ΔOEM và ΔODM có:

OE = OD = R

ME = MD (do (3))

OM: chung

$\Rightarrow$ ΔOEM = ΔODM (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{MOE} = \widehat{MOD}$ (2 góc tương ứng)

$= \frac{1}{2}\widehat{EOD}$ (4)

Ta có $\widehat{ECD} = \frac{1}{2}\widehat{EOD}$ (5) (hệ quả góc nội tiếp)

Ta có $\widehat{HFD} = \widehat{ECD}$ (6) (cùng chắn cung HD của tứ giác HFCD nội tiếp)

Từ (4), (5) và (6) $\Rightarrow \widehat{MOD} = \widehat{HFD}$

$\Rightarrow$ Tứ giác MFOD nội tiếp (7) (tứ giác có 2 đỉnh O, F cùng nhìn cạnh MD dưới một góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{MDO} = 180^0 - \widehat{MFO}$ (tổng 2 góc đối của tứ giác MFOD nội tiếp)

$= 180^0 - 90^0 = 90^0$ (vì AF $\perp$ BC)

$\Rightarrow$ MD $\perp$ DO

Xét tứ giác MEOD có:

$\widehat{MEO} = \widehat{MDO} = 90^0$ (vì ΔMEO = MDO: cmt)

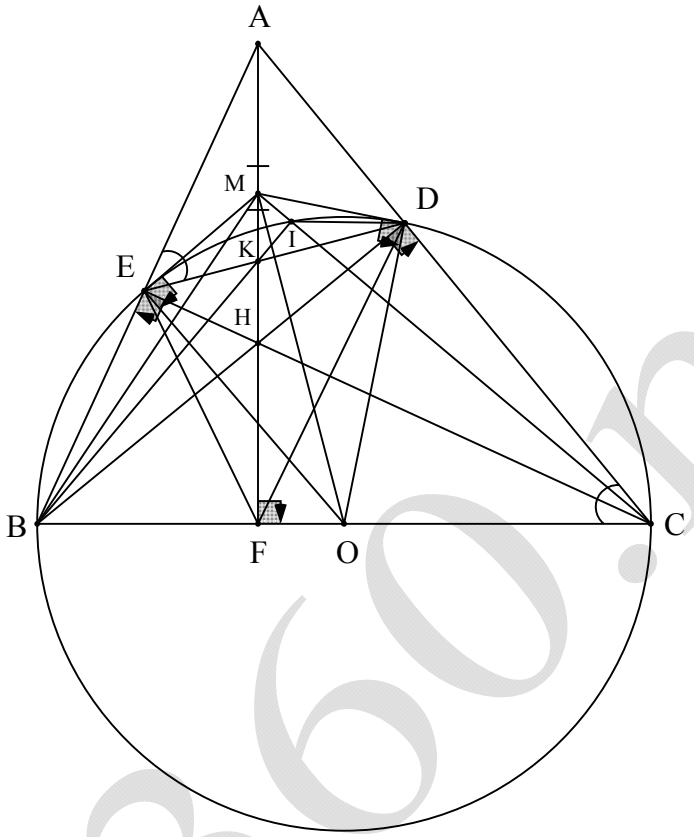
$\Rightarrow \widehat{MEO} + \widehat{MDO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác MEOD nội tiếp (8) (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow$ 5 điểm M, E, F, O, D cùng thuộc đường tròn (MOD)

c) Gọi K là giao điểm của AH và DE. Chứng minh: $MD^2 = MK.MF$ và K là trực tâm của tam giác MBC

Giải:



Gọi I là giao điểm thứ hai của MC và đường tròn (O)

Ta có $\widehat{MDE} = \widehat{DCE}$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Hay $\widehat{MDK} = \widehat{HCD}$

$= \widehat{HFD}$ (cùng chắn cung HD của tứ giác HFCD nội tiếp)

$= \widehat{MFD}$ (9)

Xét ΔMDK và ΔMFD có:

$\widehat{FMD}$: chung

$\widehat{MDK} = \widehat{MFD}$ (do (9))

$\Rightarrow$ ΔMDK ∽ ΔMFD (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MF} = \dfrac{MK}{MD} \Leftrightarrow MD^2 = MK.MF$ (10)

Ta có $\widehat{MDI} = \widehat{MCD}$ (11) (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Xét ΔMDI và ΔMCD có:

$\widehat{CMD}$: chung

$\widehat{MDI} = \widehat{MCD}$ (do (11))

$\Rightarrow$ ΔMDI ∽ ΔMCD (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MC} = \dfrac{MI}{MD} \Leftrightarrow MD^2 = MI.MC$ (12)

Từ (10) và (12) $\Rightarrow$ $MI.MC = MK.MF = MD^2$

$\Rightarrow \frac{MI}{MF} = \frac{MK}{MC}$ (13)

Xét ΔMKI và ΔMCF có:

$\widehat{FMC}$: chung

$\frac{MI}{MF} = \frac{MK}{MC}$ (do (13))

$\Rightarrow$ ΔMKI ∽ ΔMCF (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MIK} = \widehat{MFC} = 90^0$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow$ KI ⊥ MC (14)

Mà $\widehat{BIC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ BI ⊥ MC (15)

Từ (14) và (15) $\Rightarrow$ 3 điểm B, K, I thẳng hàng

$\Rightarrow$ BK ⊥ MC

Mà MK ⊥ BC nên K là trực tâm ΔMBC

d) Chứng minh: $\frac{2}{FK} = \frac{1}{FH} + \frac{1}{FA}$

Giải:

Ta có $FA.FH = (FM + MA)(FM - MH)$

$= (FM + MA)(FM - MA) = FM^2 - MA^2$ (16) (vì MA = MH)

Ta có $FK.FM = (FM - MK).FM = FM^2 - MK.MF$

$= FM^2 - MD^2$ (do trên)

$= FM^2 - MA^2$ (17) (vì MD = MA)

Từ (16) và (17) $\Rightarrow$ FA.FH = FK.FM

$\Rightarrow \frac{2}{FK} = \frac{2FM}{FA.FH} = \frac{(FM + MA) + (FM - MH)}{FA.FH} = \frac{FA + FH}{FA.FH} = \frac{1}{FA} + \frac{1}{FH}$