

## BÀI GIẢI

**Câu 1:** (2 điểm)

a) Giải phương trình:  $(x^2 + 1)^2 - (x^2 + 31) = 0$  (1)

**Giải:**

$$(1) \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 - 31 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 - 30 = 0$$

Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ )

Phương trình (1) trở thành:  $t^2 + t - 30 = 0$  (\*)

Ta có  $\Delta = 1^2 - 4.1.(-30) = 1 + 120 = 121 > 0$ ;  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$

Do  $\Delta > 0$  nên phương trình (\*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$t_1 = \frac{-1+11}{1} = 10 \text{ (nhận)}; t_2 = \frac{-1-11}{1} = -12 \text{ (loại)}$$

Với  $t_1 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10}$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là:  $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$

b) Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 120m và diện tích bằng 675m<sup>2</sup>. Tìm chiều dài và chiều rộng khu vườn

**Giải:**

Gọi  $x, y$  (m) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của khu vườn hình chữ nhật ( $y > x > 0$ )

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2(x+y) = 120 \\ xy = 675 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 60 \\ xy = 675 \end{cases}$$

$\Rightarrow x, y$  là nghiệm của phương trình:  $X^2 - 60X + 675 = 0$  (vì  $60^2 - 4.675 = 900 > 0$ )

Ta có  $\Delta' = (-30)^2 - 1.675 = 225 > 0$ ;  $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{225} = 15$

Do  $\Delta' > 0$  nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$X_1 = \frac{30+15}{1} = 45 \quad X_2 = \frac{30-15}{1} = 15$$

Vì  $y > x > 0$  nên 
$$\begin{cases} y = X_1 = 45 \\ x = X_2 = 15 \end{cases}$$

Vậy khu vườn hình chữ nhật có chiều rộng 15m và chiều dài là 45m

**Câu 2:** (1,5 điểm)

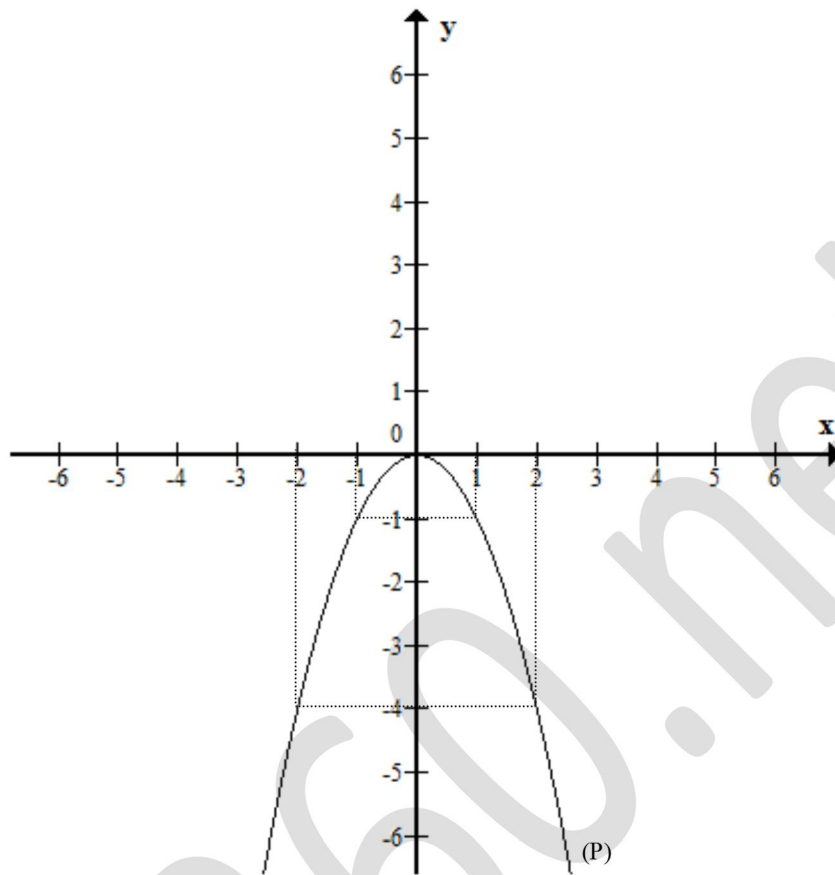
a) Vẽ đồ thị hàm số (P):  $y = -\frac{1}{4}x^2$

**Giải:**

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{x^2}{4}$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị



b) Tìm  $m$  để đường thẳng (D):  $y = \frac{1}{2}x + m + 2$  cắt (P):  $y = -\frac{1}{4}x^2$  tại điểm M có hoành độ  $x = -4$

**Giải:**

Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) có dạng:  $-\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + m + 2$  (\*)

Vì (D) cắt (P) tại điểm M có hoành độ  $x = -4$  nên  $x = -4$  là nghiệm của (\*)

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}(-4)^2 = \frac{1}{2}(-4) + m + 2 \Leftrightarrow -4 = -2 + m + 2 \Leftrightarrow m = -4$$

Vậy  $m = -4$  là giá trị cần tìm

**Câu 3:** (1,5 điểm)

a) Thu gọn biểu thức sau:  $A = \sqrt{27 + 10\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{5 + \sqrt{13}}}$

**Giải:**

$$\text{Ta có: } A = \sqrt{27 + 10\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{5 + \sqrt{13}}}$$

$$\text{Đặt } T = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{5 + \sqrt{13}}} \quad (T > 0)$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}\sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + 5 + 2\sqrt{3}}{5 + \sqrt{13}} = \frac{10 + 2\sqrt{25 - 12}}{5 + \sqrt{13}} = \frac{2(5 + \sqrt{13})}{5 + \sqrt{13}} = 2$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{2} \text{ (vì } T > 0)$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{27 + 10\sqrt{2}} = \sqrt{(5 + \sqrt{2})^2} = |5 + \sqrt{2}| = 5 + \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } A = 5 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 5$$

- b) Năm nay, tổng số tuổi của An và mẹ là 36 tuổi. Hai năm sau tuổi của mẹ gấp 3 lần tuổi của An. Hỏi năm nay An bao nhiêu tuổi?

**Giải:**

Gọi  $x, y$  (tuổi) lần lượt là số tuổi của An và mẹ ( $y > x > 0$ )

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y = 36 \\ y + 2 = 3(x + 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 36 \\ 3x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 32 \\ 3x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ 24 - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 28 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy năm nay AN 8 tuổi, mẹ 28 tuổi

**Câu 4:** (1,5 điểm) Cho phương trình:  $x^2 - 6x + 2m - 1 = 0$  (1) ( $m$  tham số)

- a) Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình có nghiệm

**Giải:**

$$\text{Ta có } \Delta = (-3)^2 - 1 \cdot (2m - 1) = 9 - 2m + 1 = 10 - 2m$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 10 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow -2m \geq -10 \Leftrightarrow m \leq 5$$

Vậy  $m \leq 5$  thì phương trình có nghiệm

- b) Tìm  $m$  để phương trình (1) có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 15$

**Giải:**

Theo câu a, với  $m \leq \frac{13}{8}$  thì phương trình có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6 \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2m-1}{1} = 2m-1 \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có:  $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 15$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6^2 - 3(2m - 1) - 15 = 0 \text{ (do hệ thức Vi-ét)}$$

$$\Leftrightarrow 36 - 6m + 3 - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6m + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6m = -24$$

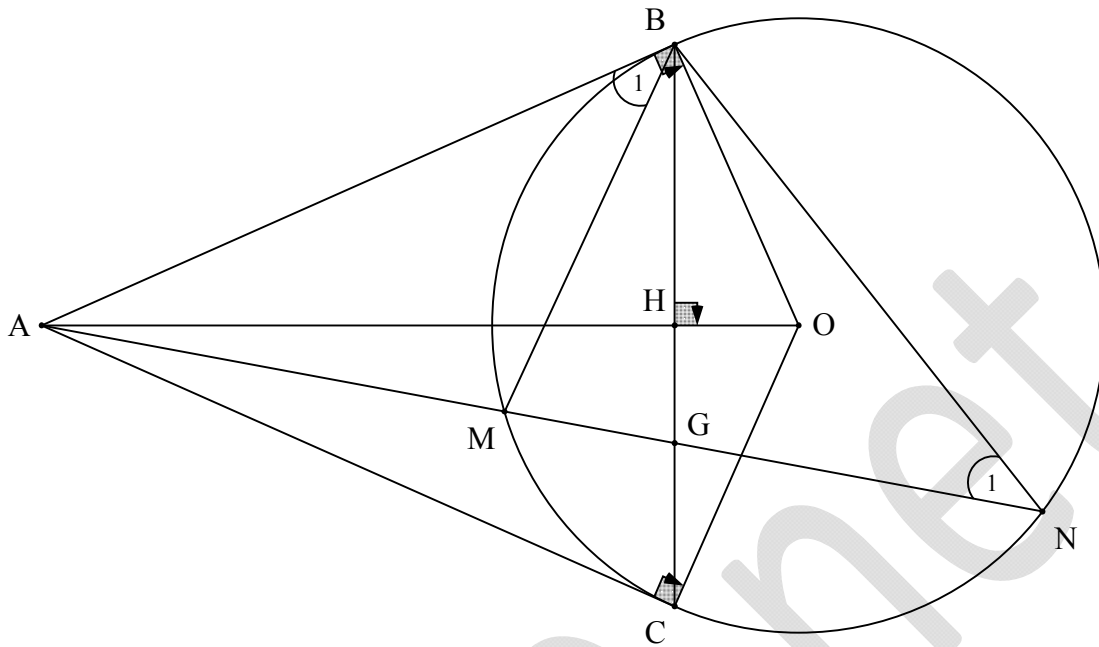
$$\Leftrightarrow m = 4 \text{ (nhận)}$$

Vậy  $m = 4$  là giá trị cần tìm

**Câu 5:** (3,5 điểm) Cho  $(O; R)$  và một điểm  $A$  ở ngoài  $(O)$ . Từ  $A$  vẽ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  với  $(O)$  ( $B, C$  là 2 tiếp điểm). Vẽ cát tuyến  $AMN$  không đi qua  $O$  ( $M$  nằm giữa  $A$  và  $N$ ) cắt  $BC$  tại  $G$ . Gọi  $H$  là giao điểm của  $AO$  và  $BC$

- a) Chứng minh:  $AO \perp BC$  và  $AM \cdot AN = AB^2$

**Giải:**



Ta có  $AB = AC$  (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$OB = OC (= R)$

$\Rightarrow AO$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$

$\Rightarrow AO \perp BC$  tại  $H$

Xét  $\triangle ABM$  và  $\triangle ANB$  có:

$\widehat{MAB} = \widehat{BAN}$  : chung

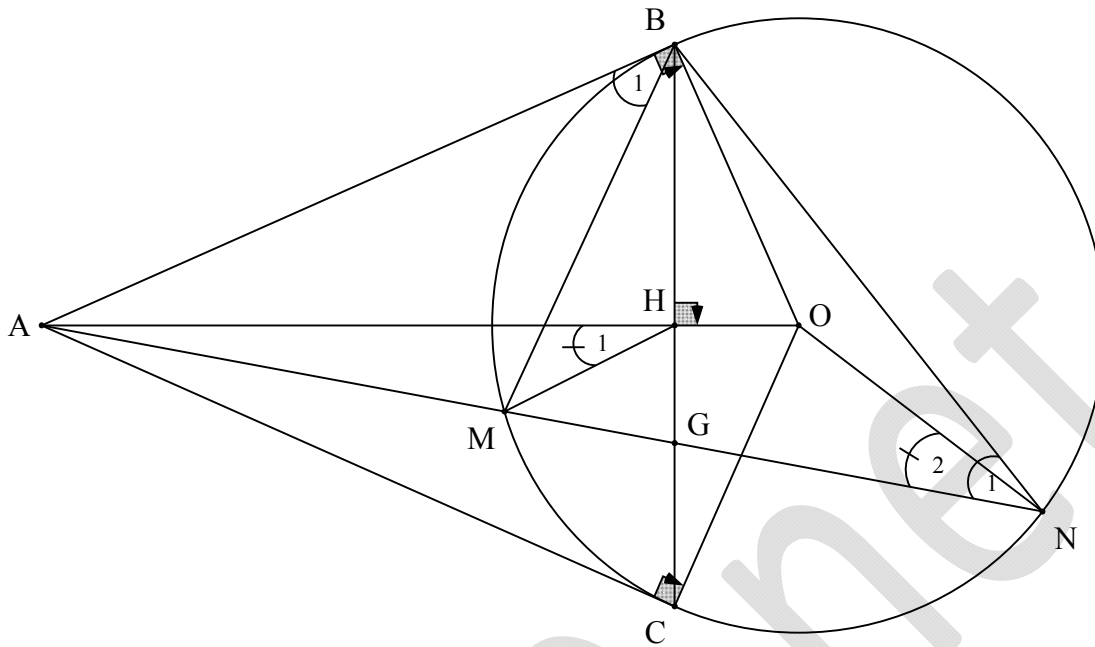
$\widehat{B_1} = \widehat{N_1}$  (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle ANB$  (g.g)

$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AN} \Leftrightarrow AM \cdot AN = AB^2$  (1)

b) Chứng minh:  $AM \cdot AN = AH \cdot AO$ , suy ra tứ giác  $OHMN$  nội tiếp

**Giải:**



Ta có  $\Delta ABO$  vuông tại B và có BH là đường cao

$\Rightarrow AB^2 = AH \cdot AO$  (2) (hệ thức lượng)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow AM \cdot AN = AH \cdot AO$  (3)

Xét  $\Delta AHM$  và  $\Delta ANO$  có:

M $\hat{A}$ H : chung

$$\frac{AM}{AO} = \frac{AH}{AN} \text{ (do (3))}$$

$\Rightarrow \Delta AHM \sim \Delta ANO$  (c.g.c)

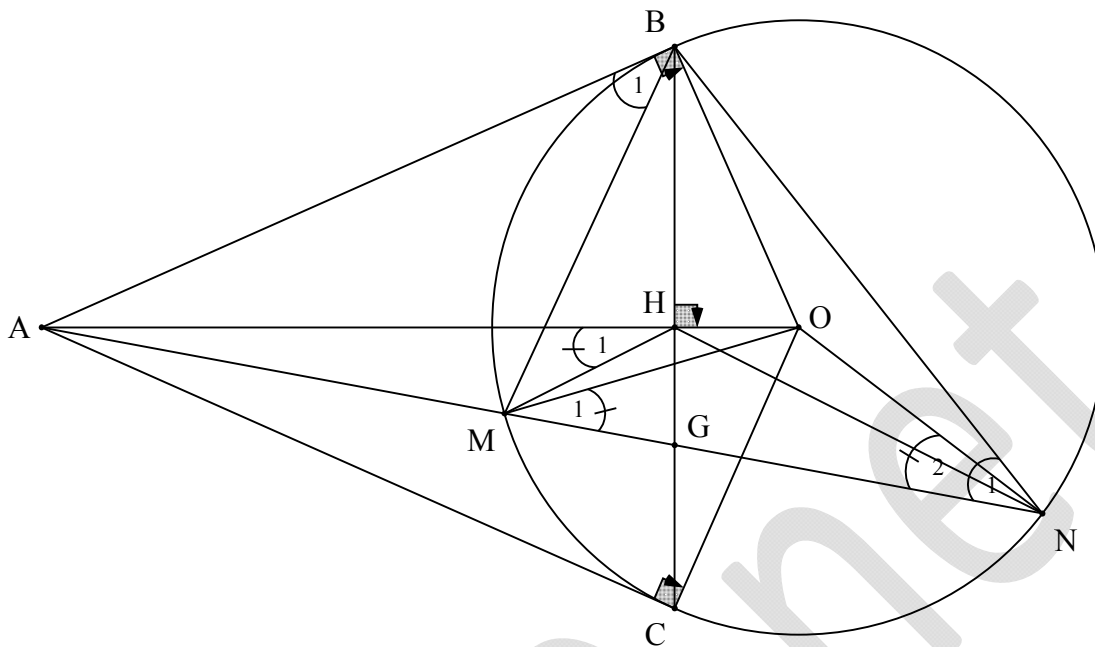
$\Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{N}_2$  (4) (2 góc tương ứng)

Xét tứ giác OHMN có:  $\hat{H}_1 = \hat{N}_2$  (do (4))

$\Rightarrow$  Tứ giác OHMN nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

c) Chứng minh: HB là tia phân giác của góc MHN

**Giải:**

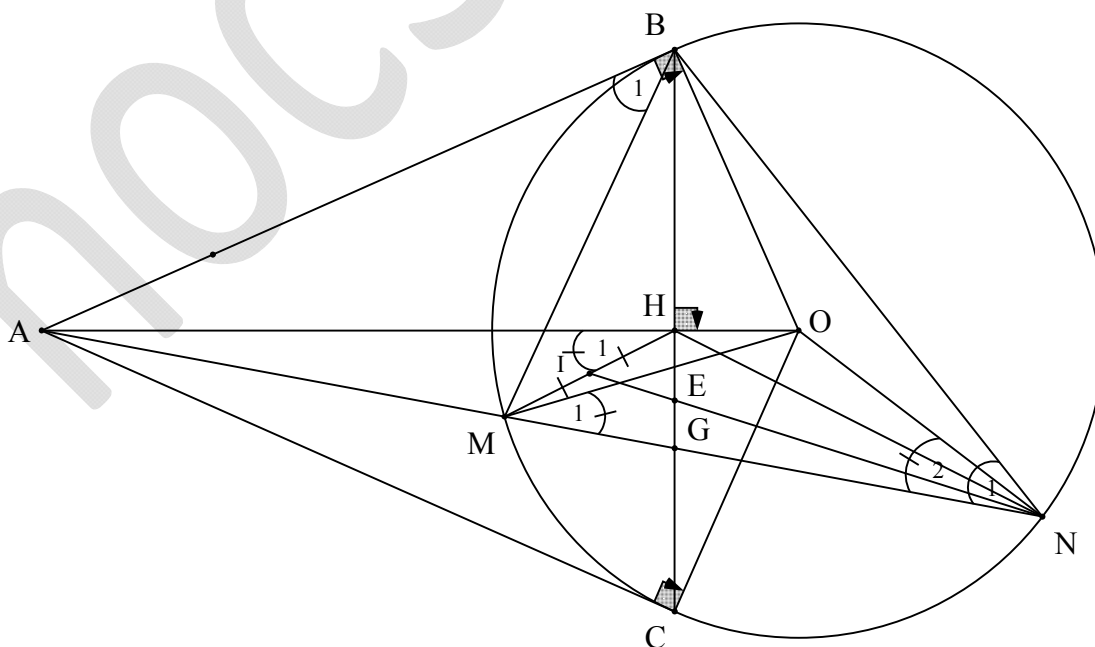


Ta có  $\widehat{GHM} = 90^\circ - \widehat{H}_1$  (2 góc phụ nhau)  
 $= 90^\circ - \widehat{N}_2$  (do (4))  
 $= 90^\circ - \widehat{M}_1$  (vì  $OM = ON = R$  nên  $\triangle OMN$  cân tại  $O$ )  
 $= 90^\circ - \widehat{OHN}$  (cùng chắn cung  $ON$  của tứ giác  $OHMN$  nội tiếp)  
 $= \widehat{GHN}$

$\Rightarrow HB$  là tia phân giác của góc  $MHN$

d) Gọi  $I$  là trung điểm của  $MH$ ,  $NI$  cắt  $CB$  tại  $E$ . Chứng minh:  $\frac{EH}{EG} = \frac{HM}{HN} = 1$

**Giải:**



Xét  $\Delta HMG$  có: I thuộc cạnh HM, E thuộc cạnh HG, N thuộc phần ngoài cạnh MG

Áp dụng định lý Menelaus ta được:  $\frac{IH}{IM} \cdot \frac{EG}{EH} \cdot \frac{NM}{NG} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{EH}{EG} = \frac{NM}{NG} \Leftrightarrow \frac{EH}{EG} = \frac{NG + MG}{NG} = 1 + \frac{MG}{NG} \Leftrightarrow \frac{EH}{EG} - \frac{MG}{NG} = 1 \quad (5)$$

Ta có HG là phân giác của góc MHN

$$\Rightarrow \frac{MG}{NG} = \frac{HM}{HN} \quad (6)$$

$$\text{Từ (5) và (6)} \Rightarrow \frac{EH}{EG} - \frac{HM}{HN} = 1$$