

BÀI GIẢI

Câu 1: (2 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $4x^2 + 7 = 16x$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 7 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta' = (-8)^2 - 4 \cdot 7 = 64 - 28 = 36 > 0; \sqrt{\Delta'} = \sqrt{36} = 6$$

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{8+6}{4} = \frac{7}{2}; x_2 = \frac{8-6}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: } S = \left\{ \frac{7}{2}; \frac{1}{2} \right\}$$

b) $2x^2 - 5x^2 - 3 = 0$ (2)

Giải:

Ta có $a - b + c = 2 - (-5) + (-3) = 0$ nên phương trình (2) có 2 nghiệm:

$$x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là: } S = \left\{ -1; \frac{3}{2} \right\}$$

c) $\begin{cases} 2x = 5 + y \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ (3)

Giải:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = -10 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -2 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 6 - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình (3) là: $(x; y) = (2; -1)$

d) $x(x+5) = -7 - 2(2x+5)$ (4)

Giải:

$$(4) \Leftrightarrow x^2 + 5x = -7 - 4x - 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 7 + 4x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x + 17 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 17 = 81 - 68 = 13 > 0; \sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 + \sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{-9 - \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình (4) là: } S = \left\{ \frac{-9 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-9 - \sqrt{13}}{2} \right\}$$

Câu 2: (1,5 điểm)

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{4}$

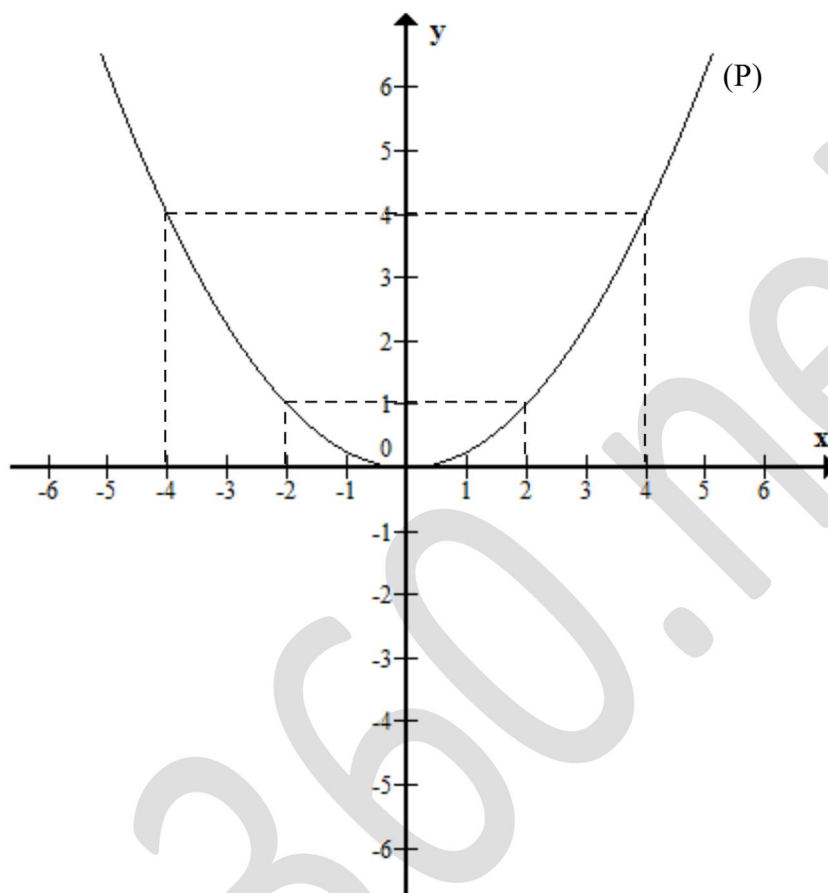
Giải:

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	2	4
---	----	----	---	---	---

$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	0	1	4
----------------------	---	---	---	---	---

Vẽ đồ thị



b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = x + m$ tiếp xúc với (P)

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng $y = x + m$ có dạng: $-\frac{1}{4}x^2 = x + m$

$$\Leftrightarrow -x^2 = 4x + 4m \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4m = 0 \quad (*)$$

Để (P) tiếp xúc với đường thẳng $y = x + m \Leftrightarrow (*)$ có duy nhất 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m = 0 \Leftrightarrow -4m = -4 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy $m = 1$ thì (P) tiếp xúc với đường thẳng $y = x + m$

Câu 3: (1,5 điểm)

a) Thu gọn:
$$\frac{2\sqrt{4 + \sqrt{5 - \sqrt{21 - \sqrt{80}}}}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$$

Giải:

$$\text{Ta có: } \frac{2\sqrt{4 + \sqrt{5 - \sqrt{21 - \sqrt{80}}}}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{4 + \sqrt{5 - \sqrt{21 - 4\sqrt{5}}}}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{4 + \sqrt{5 - \sqrt{(2\sqrt{5} - 1)^2}}}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\sqrt{4+\sqrt{5-|2\sqrt{5}-1|}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{4+\sqrt{5-(2\sqrt{5}-1)}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{4+\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} \\
 &= \frac{2\sqrt{4+|\sqrt{5}-1|}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{4+(\sqrt{5}-1)}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{\sqrt{5}+1} \\
 &= \frac{|\sqrt{5}+1|}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = 1
 \end{aligned}$$

- b) Tỷ lệ tăng dân số hằng năm của một nước là 1,5%. Năm 2008, dân số nước này là 212.942.000 người. Hỏi dân số nước này vào năm 2016 là bao nhiêu?

Giải:

Từ năm 2008 đến năm 2016 là 8 năm

Vậy dân số năm 2016 là: $212942000(1+1,5\%)^8 = 239877584$ (người)

Câu 4: (1,5 điểm) Cho phương trình: $x^2 + (m-2)x - m + 1 = 0$ (m là tham số)

- a) Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm với mọi m

Giải:

Ta có $\Delta = (m-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m+1) = m^2 - 4m + 4 + 4m - 4 = m^2 \geq 0, \forall m$

Do $\Delta \geq 0, \forall m$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m

- b) Tìm m để 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - 4x_1 x_2 = -2$

Giải:

Theo câu a, với mọi m phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{m-2}{1} = 2-m \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m+1}{1} = 1-m \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có: $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - 4x_1 x_2 = -2$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-m)(2-m) - 4(1-m) + 2 = 0 \text{ (do hệ thức Vi-ét)}$$

$$\Leftrightarrow 2 - m - 2m + m^2 - 4 + 4m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m+1) = 0$$

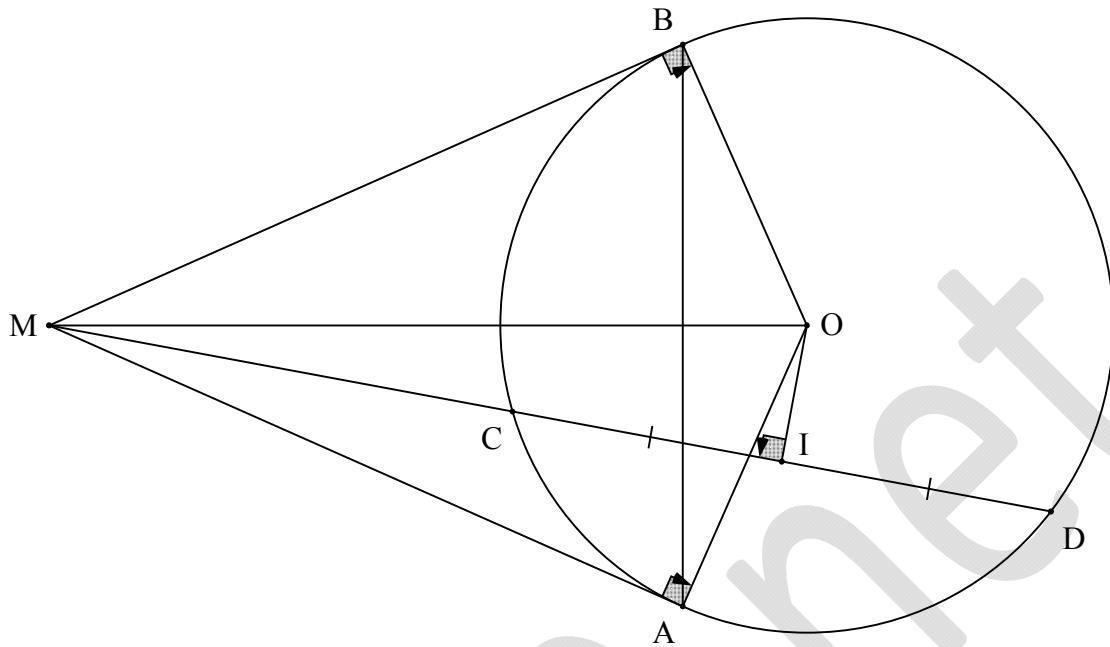
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = -1$ là các giá trị cần tìm

Câu 5: (3,5 điểm) Cho đường tròn tâm O và điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ tiếp tuyến MA và MB và cát tuyến MCD đến đường tròn (O) (A và B là 2 tiếp điểm, C nằm giữa M và D), gọi I là trung điểm CD

- a) Chứng tỏ 5 điểm O, I, A, M, B cùng thuộc 1 đường tròn

Giải:



Ta có I là trung điểm của CD và dây CD không qua tâm O

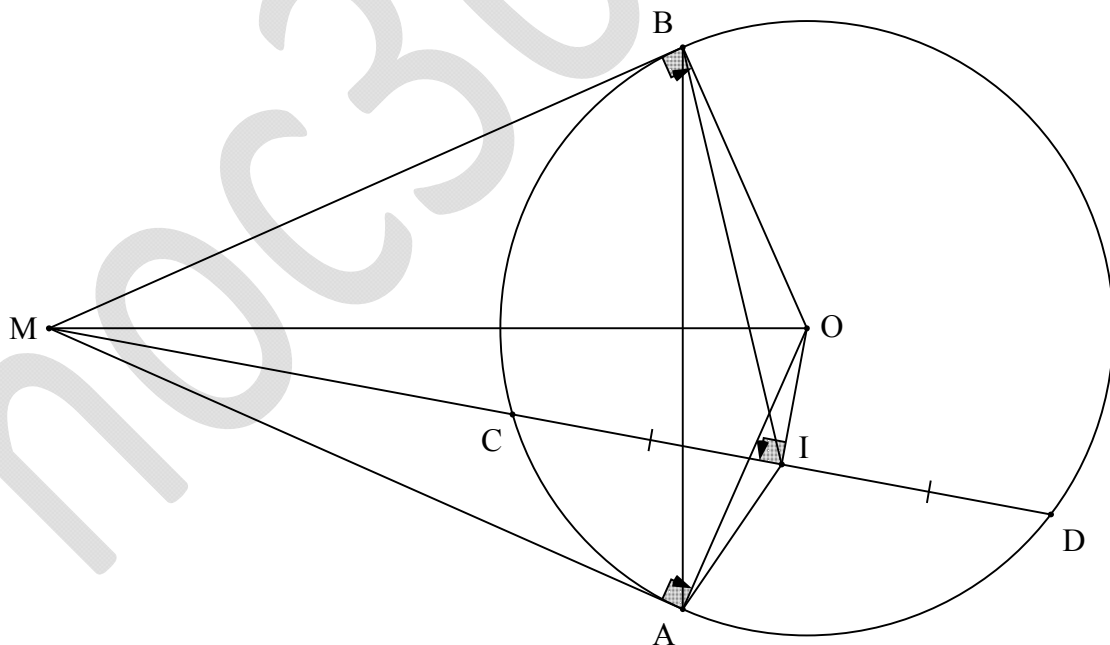
$\Rightarrow OI \perp CD$ (liên hệ giữa đường kính và dây cung)

Ta có $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = \widehat{MIO} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến và $OI \perp CD$)

$\Rightarrow 5$ điểm O, I, A, M, B cùng thuộc đường tròn đường kính MO

b) Chứng minh IM là phân giác góc AIB

Giải:



Ta có $\widehat{MIA} = \widehat{MOA}$ (cùng chắn cung MA của đường tròn đường kính MO)

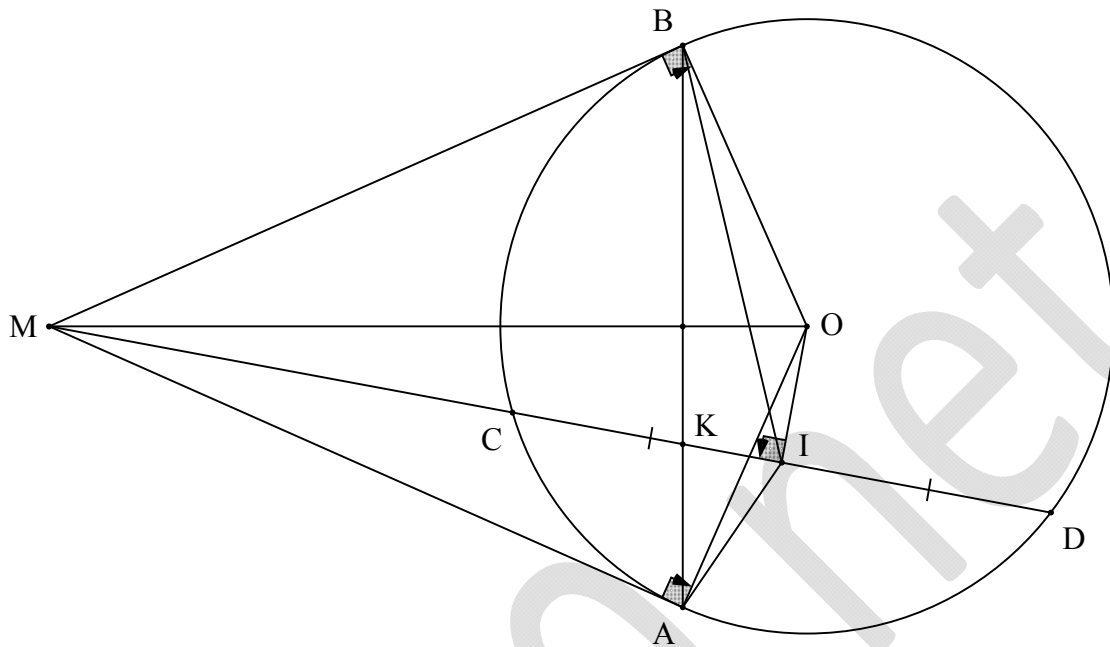
$= \widehat{MOB}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$= \widehat{MIB}$ (cùng chắn cung MB của đường tròn đường kính MO)

$\Rightarrow IM$ là phân giác góc AIB

c) Gọi K là giao điểm của AB và CD. Chứng minh: $AM^2 = MK.MI$

Giải:



Ta có $\widehat{MAK} = \widehat{MBK}$ (vì $MA = MB$: tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau nên $\triangle MAB$ cân tại M)
 $= \widehat{MIA}$ (1) (cùng chắn cung MA của đường tròn đường kính MO)

Xét $\triangle MAK$ và $\triangle MIA$ có:

$\widehat{MKI} = \widehat{MIA}$: chung

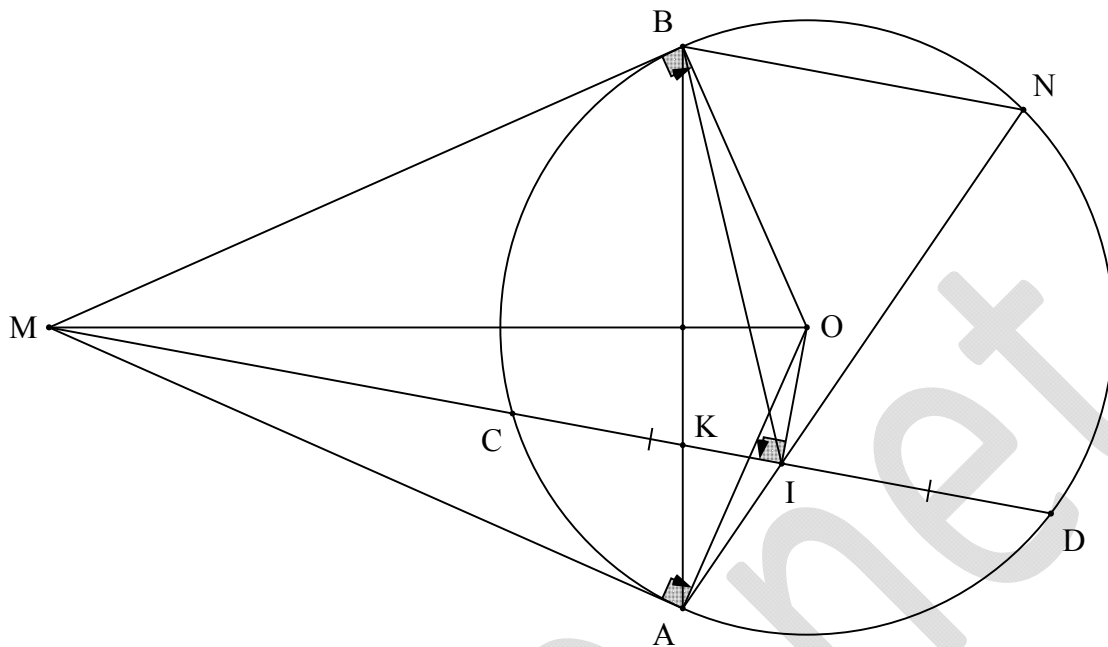
$\widehat{MAK} = \widehat{MIA}$ (do (1))

$\Rightarrow \triangle MAK \sim \triangle MIA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MI} = \frac{MK}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MK.MI$$

d) Kẻ AI cắt đường tròn (O) tại N. Chứng minh: DM song song NB

Giải:



Ta có $\widehat{AIM} = \widehat{ABM}$ (cùng chắn cung AM của đường tròn đường kính MO)
= \widehat{ANB} (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)
 $\Rightarrow DM \parallel BN$ (2 góc bằng nhau và ở vị trí đồng vị: dấu hiệu nhận biết 2 đường thẳng song song)