

BÀI GIẢI

Câu 1: (2 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{2x-3}{3} + \frac{x^2-11}{6} = \frac{x+1}{2}$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2(2x-3)}{6} + \frac{x^2-11}{6} = \frac{3(x+1)}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-3) + x^2 - 11 = 3(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 6 + x^2 - 11 = 3x + 3$$

$$\Leftrightarrow 4x - 6 + x^2 - 11 - 3x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0$$

Ta có $\Delta = 1^2 - 4.1.(-20) = 1 + 80 = 81 > 0; \sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-1+9}{2.1} = 4; x_2 = \frac{-1-9}{2.1} = -5$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S = \{4; -5\}$

- b) Một nhân viên tại siêu thị xếp 103 chai nước tương vào các thùng để giao hàng, mỗi thùng có sức chứa 12 chai. Hỏi người đó cần ít nhất bao nhiêu cái thùng để chứa hết số chai nước tương? Khi đó, thùng nhẹ nhất chứa bao nhiêu chai nước tương?

Giải:

Ta thấy $103 = 12 \cdot 8 + 7$ nên 103 chia cho 12 được 8 và dư 7

Vậy cần ít nhất là 9 thùng và thùng nhẹ nhất chứa 7 chai

Câu 2: (1,5 điểm) Cho (P): $y = -\frac{x^2}{4}$ và (d): $y = mx - 6$

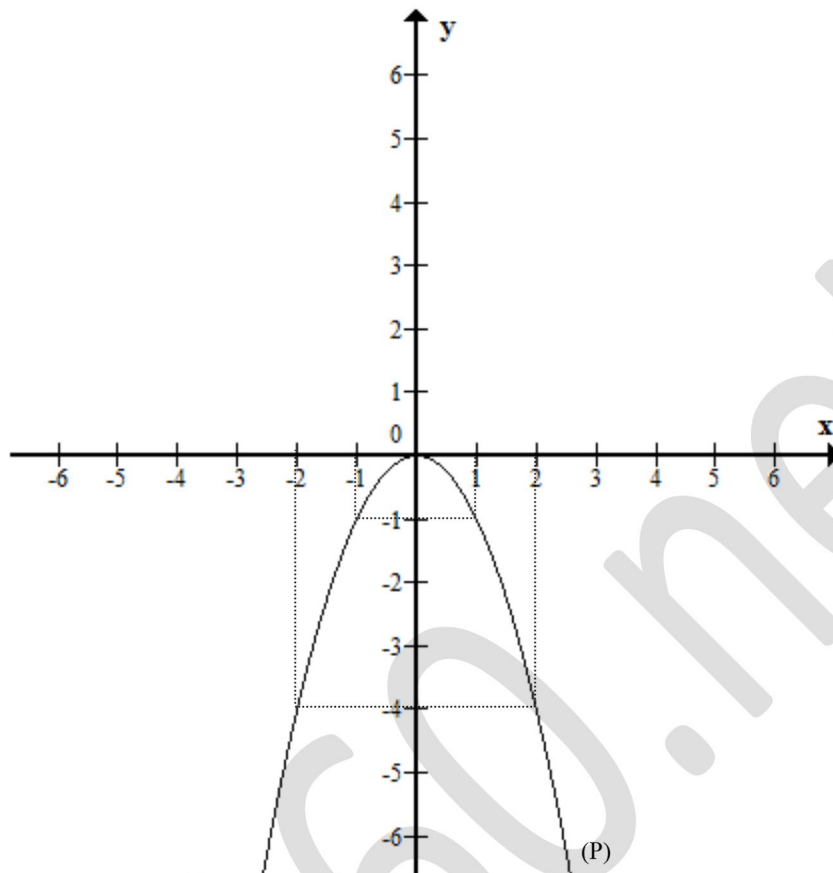
- a) Vẽ đồ thị (P)

Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{x^2}{4}$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị



b) Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại điểm có hoành độ bằng 4 (với $m \neq 0$)

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) có dạng: $\frac{-x^2}{4} = mx - 6$ (*)

Vì (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 4 nên $x = 4$ là nghiệm của (*)

$$\Rightarrow \frac{-4^2}{4} = m \cdot 4 - 6 \Leftrightarrow 4m - 6 = -4 \Leftrightarrow 4m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ (thỏa)}$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm

Câu 3: (1,5 điểm)

a) Rút gọn: $A = \left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{8 - \sqrt{15}}}{\sqrt{30} - \sqrt{2}} \right) \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}} \right)$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{8 - \sqrt{15}}}{\sqrt{30} - \sqrt{2}} \right) \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}} \right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{8 - \sqrt{15}}}{\sqrt{2}(\sqrt{30} - \sqrt{2})} \right) \left(\frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{5})}{\sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{2}\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{16-2\sqrt{15}}}{2\sqrt{15}-2}} \right) \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \right) \\
 &= \left(\left| \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right| - \frac{\sqrt{(\sqrt{15}-1)^2}}{2(\sqrt{15}-1)} \right) \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{|\sqrt{15}-1|}{2(\sqrt{15}-1)} \right) \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+|\sqrt{5}+1|} + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-|\sqrt{5}-1|} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{15}-1}{2(\sqrt{15}-1)} \right) \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}+1} + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}+1} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{3+\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{3-\sqrt{5}} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(3-\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{10}) + (3+\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{10})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}+3\sqrt{10}-3\sqrt{10}-5\sqrt{2}+9\sqrt{2}-3\sqrt{10}+3\sqrt{10}-5\sqrt{2}}{9-5} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8\sqrt{2}}{4} = \sqrt{6}
 \end{aligned}$$

- b) Quốc kỳ của Nhật Bản là một hình chữ nhật với tỉ lệ 2:3 có nền là màu trắng. Ở trung tâm của hình chữ nhật là 1 hình tròn màu đỏ có đường kính bằng $\frac{3}{5}$ chiều rộng của lá cờ.

Để chào mừng quốc khánh Nhật Bản ngày 11/02/2018, công viên Rin Rin Park dự định trồng hoa hồng trắng và hoa hồng đỏ trên mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 100m để mô phỏng lá cờ Nhật Bản cho đúng tỉ lệ. Em hãy tính diện tích phần đất trồng hoa hồng mỗi loại (Làm tròn đến hàng phần trăm với $\pi = 3,14$)

Giải:

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật để trồng hoa hồng ($y > x > 0$)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ 2(x+y) = 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=0 \\ x+y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2x+2y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=100 \\ x+y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ 20+y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=80 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Đường kính của hình tròn trồng hoa hồng đỏ là: $2R = \frac{3}{5}x = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12 \text{ (m}^2\text{)}$

\Rightarrow Bán kính của hình tròn trồng hoa hồng đỏ là: $R = 6 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích của hình tròn trồng hoa hồng đỏ là: $\pi R^2 = 3,14 \cdot 12^2 = 452,16 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích của hình tròn trồng hoa hồng trắng là: $20 \cdot 80 - 452,16 = 1147,84 \text{ (m}^2\text{)}$

Câu 4: (1,5 điểm) Cho phương trình: $x^2 - (m-1)x - m = 0$ (với m là tham số)

- a) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tính tổng và tích của hai nghiệm theo m

Giải:

Ta có $\Delta = [-(m-1)]^2 - 4.1.(-m) = m^2 - 2m + 1 + 4m = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Tổng và tích của hai nghiệm phương trình thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-(m-1)}{1} = m-1 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m}{1} = -m \end{cases}$$

b) Tìm m sao cho phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt đều nhỏ hơn 1

Giải:

Với $m \neq -1$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \Leftrightarrow -m - (m-1) + 1 > 0 \Leftrightarrow -m - m + 1 + 1 > 0 \Leftrightarrow -2m + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow -2m > -2 \Leftrightarrow m < 1$$

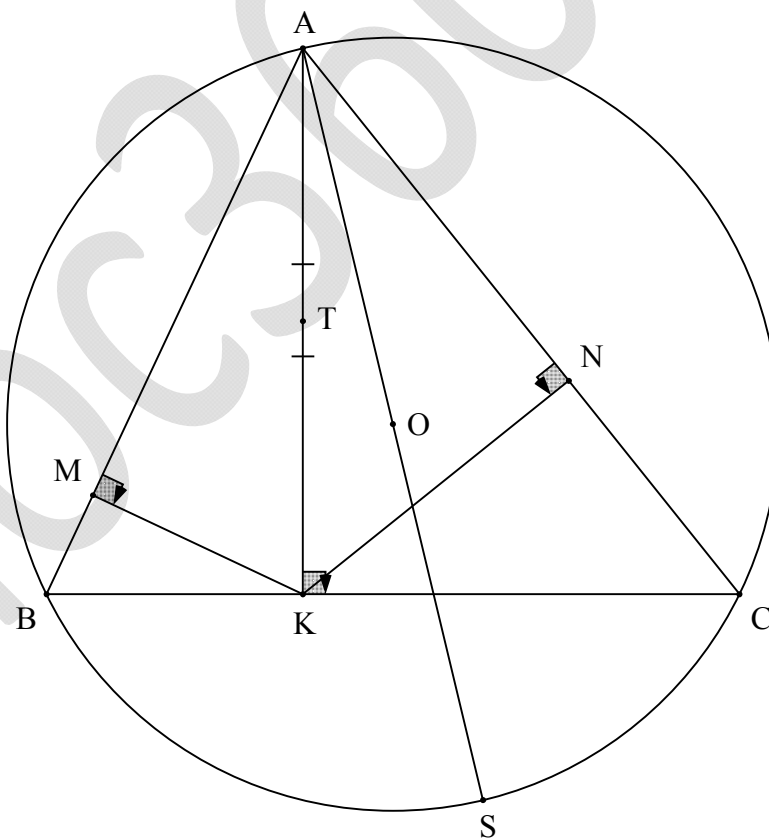
So với điều kiện ta thấy $-1 \neq m < 1$

Vậy $-1 \neq m < 1$ là giá trị cần tìm

Câu 5: (3,5 điểm) Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp (O; R) đường kính AS. Vẽ $AK \perp BC$ tại K. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của K lên AB và AC

a) Chứng minh tứ giác AMKN nội tiếp được. Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMKN

Giải:



Xét tứ giác AMKN có:

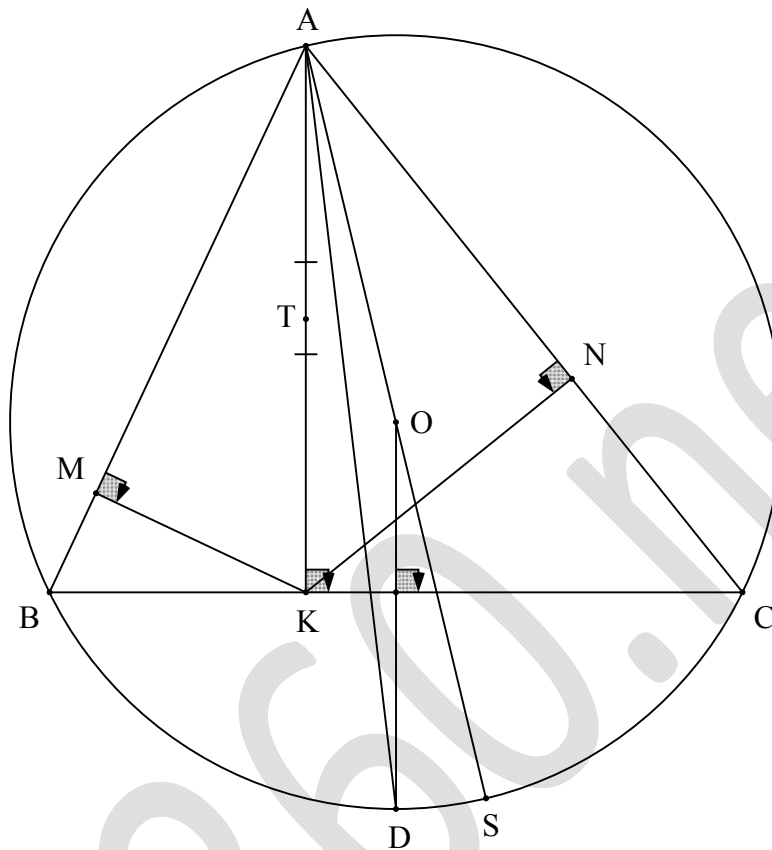
$$\widehat{AMK} + \widehat{ANK} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \text{ (vì } KM \perp AB, KN \perp AC)$$

\Rightarrow Tứ giác AMKN nội tiếp đường tròn đường kính AK (tổng 2 góc đối bằng 180°)

Tâm T là trung điểm của AK

b) Vẽ bán kính OD \perp BC. Chứng minh AD là tia phân giác của \widehat{KAO}

Giải:



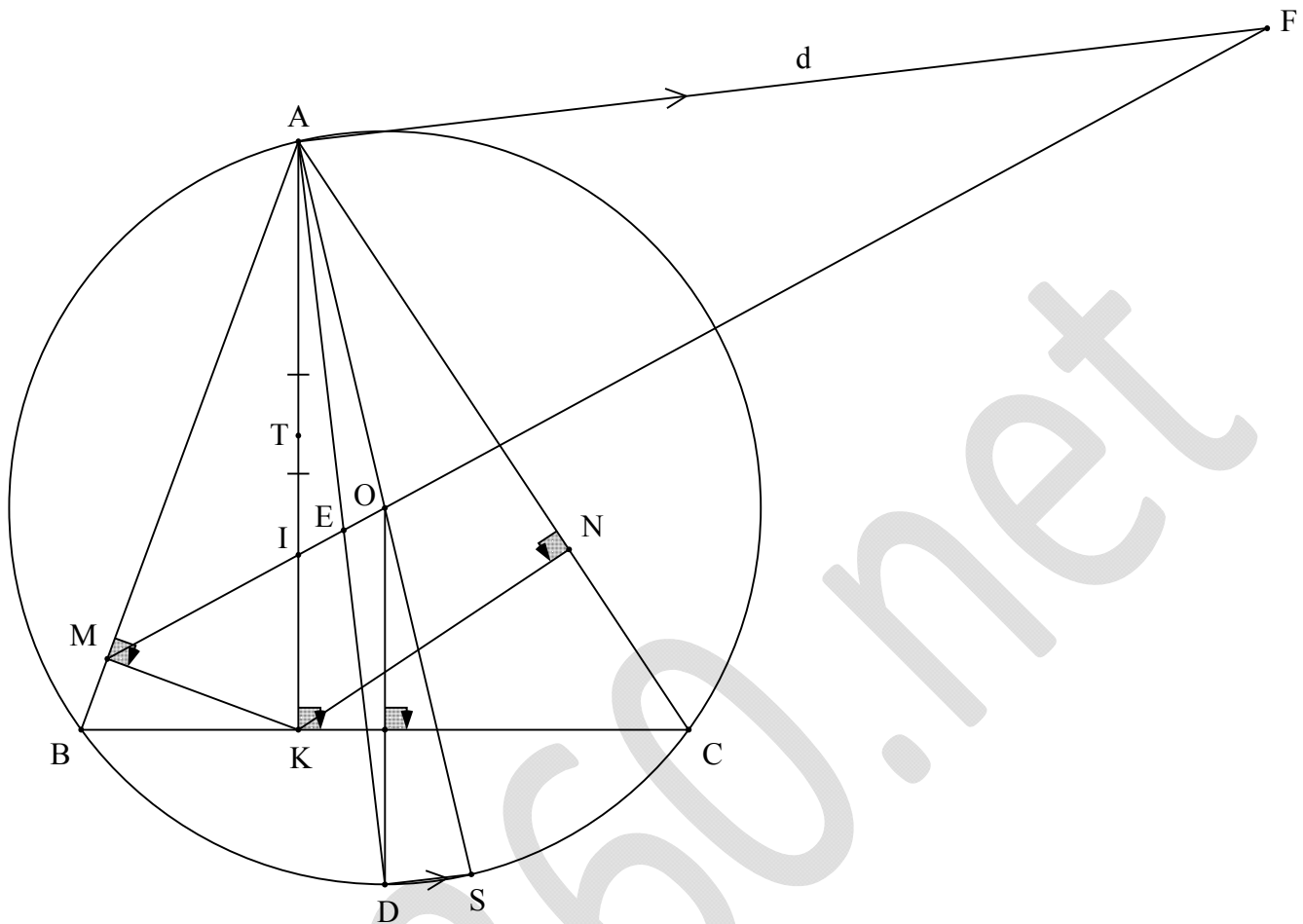
Ta có $\widehat{DAO} = \widehat{ADO}$ (vì $OA = OD = R$ nên $\triangle OAD$ cân tại O)

$= \widehat{DAK}$ (vì $OD \parallel AK$: cùng vuông góc với BC và 2 góc ở vị trí so le trong)

$\Rightarrow AD$ là tia phân giác của \widehat{KAO}

c) Qua A vẽ đường thẳng (d) \parallel DS. Đường thẳng OM cắt AD, AK, (d) theo thứ tự tại E, I, F. Chứng minh $EI \cdot FO = EO \cdot FI$

Giải:



Ta có AE là phân giác của góc IAO

$$\Rightarrow \frac{EI}{EO} = \frac{AI}{AO} \quad (1)$$

Ta có $\widehat{ADS} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$$\Rightarrow AD \perp DS$$

Mà $AF \parallel DS$ (gt)

$\Rightarrow AD \perp AF$ (quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song)

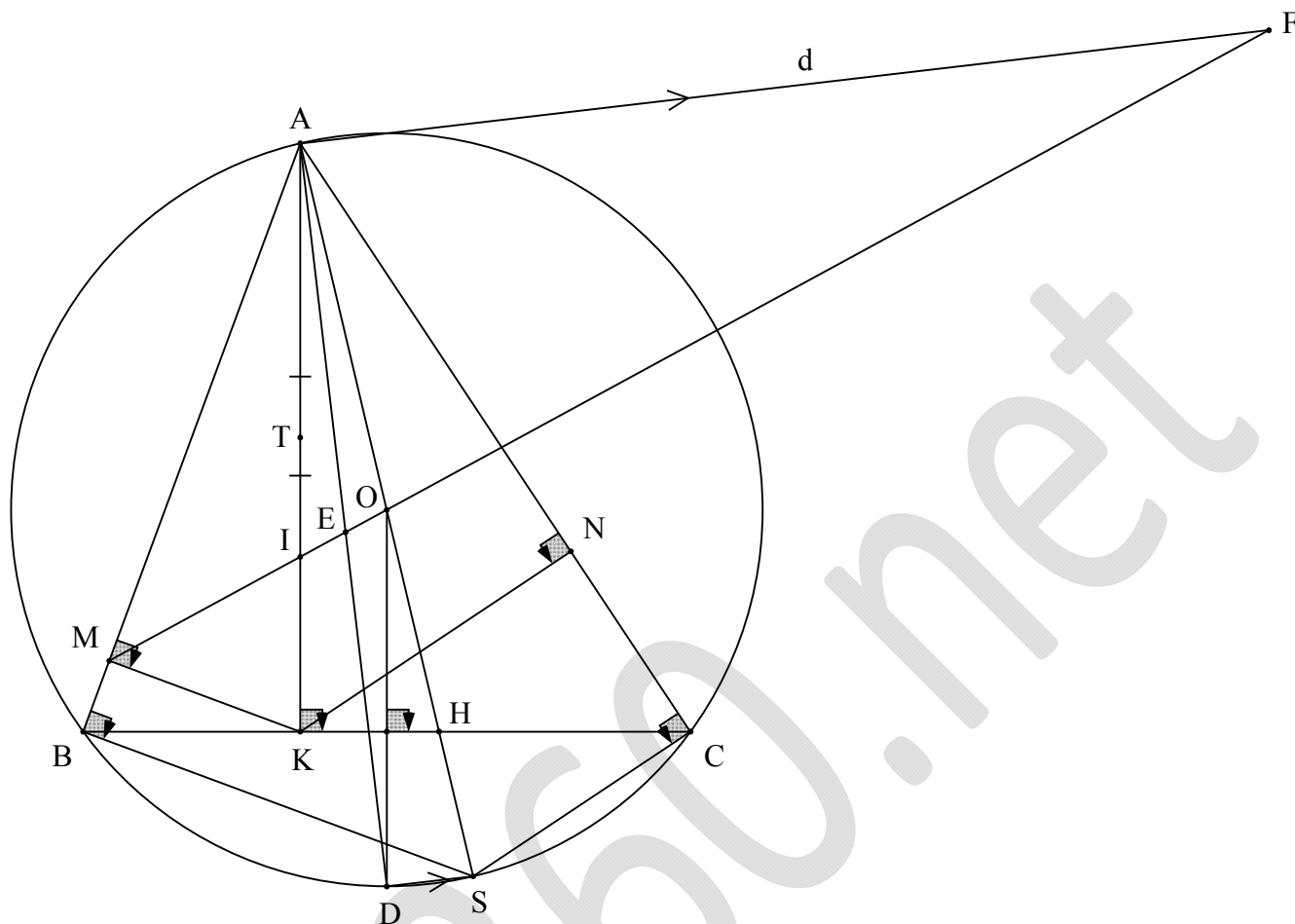
$\Rightarrow FA$ là phân giác ngoài của góc IAO

$$\Rightarrow \frac{FI}{FO} = \frac{AI}{AO} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{EI}{EO} = \frac{FI}{FO} \Leftrightarrow EI \cdot FO = EO \cdot FI$$

d) Chứng minh $\frac{AB \cdot CS + AC \cdot BS}{2BC} = R$

Giải:



Gọi H là giao điểm của AS và BC

Xét $\triangle ABK$ và $\triangle ASC$ có:

$$\widehat{ABK} = \widehat{ASC} \text{ (cùng chắn cung AC của đường tròn (O))}$$

$$\widehat{AKB} = \widehat{ACS} = 90^\circ \text{ (vì } AK \perp BC, \text{ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABK \sim \triangle ASC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AS} = \frac{BK}{CS} \Leftrightarrow AB \cdot CS = BK \cdot AS \text{ (3)}$$

Xét $\triangle ACK$ và $\triangle ASB$ có:

$$\widehat{ACK} = \widehat{ASB} \text{ (cùng chắn cung AB của đường tròn (O))}$$

$$\widehat{AKC} = \widehat{ASB} = 90^\circ \text{ (vì } AK \perp BC, \text{ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow \triangle ACK \sim \triangle ASB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AS} = \frac{CK}{BS} \Leftrightarrow AC \cdot BS = CK \cdot AS \text{ (4)}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow AB \cdot CS + AC \cdot BS &= BK \cdot AS + CK \cdot AS \\ &= AS(BK + CK) \\ &= 2R \cdot BC \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{AB \cdot CS + AC \cdot BS}{2BC} = R$$