

BÀI GIẢI

Câu 1: (2 điểm)

a) Giải phương trình: $(2x+1)^2 = 7-x$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 7 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 5x - 6 = 0$$

Ta có $\Delta = 5^2 - 4.4.(-6) = 25 + 96 = 121 > 0$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-5+11}{2.4} = \frac{3}{4}; x_2 = \frac{-5-11}{2.4} = -2$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S = \left\{ \frac{3}{4}; -2 \right\}$

b) Lớp An có tất cả 45 học sinh và số học sinh nam bằng $\frac{3}{2}$ số học sinh nữ. Hỏi: lớp An có bao nhiêu học sinh nam, bao nhiêu học sinh nữ?

Giải:

Gọi x, y lần lượt là số học sinh nam và số học sinh nữ của lớp An ($x > 0$; $y > 0$)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 45 \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 135 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 135 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27 \\ 54 - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27 \\ y = 18 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy lớp An có 27 học sinh nam và 18 học sinh nữ

Câu 2: (1,5 điểm)

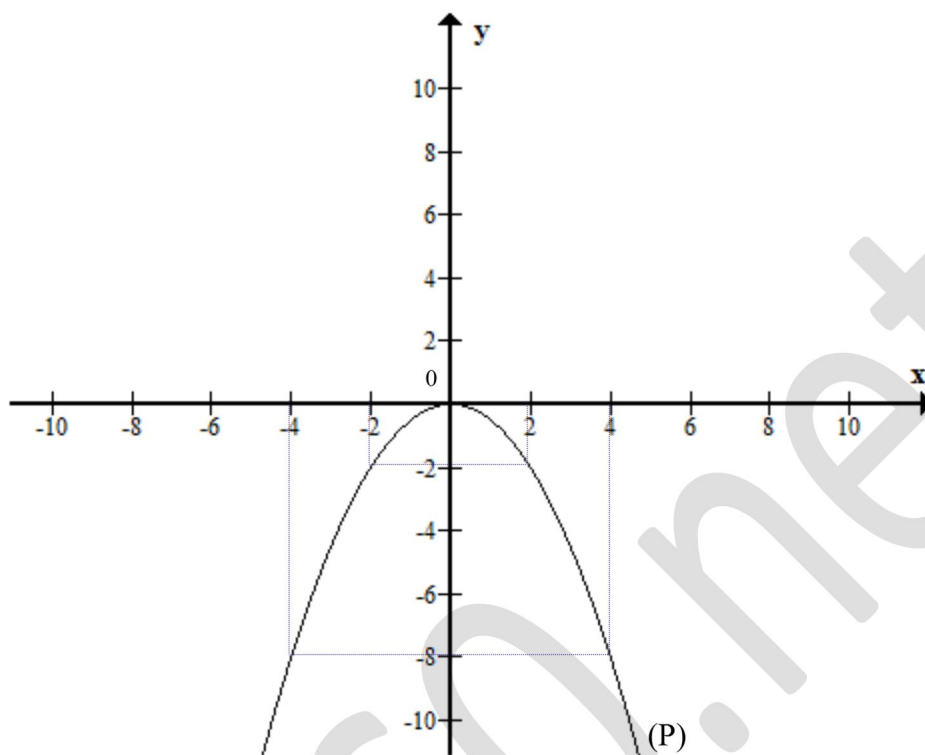
a) Trong mặt phẳng Oxy vẽ đồ thị (P) của hàm số: $y = \frac{-x^2}{2}$

Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{-x^2}{2}$	-8	-2	0	-2	-8

Đồ thị



b) Tìm m để đường thẳng (D): $y = 2x + m$ cắt (P) tại điểm C có tung độ là -2 và hoành độ dương

Giải:

Gọi $C(x_0; y_0)$

Theo đề bài, ta có: $x_0 > 0; y_0 = -2 \Rightarrow C(x_0; -2) (x_0 > 0)$

$$C(x_0; -2) \in (P): y = \frac{-x^2}{2} \Rightarrow -2 = \frac{-x_0^2}{2} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ (vì } x_0 > 0) \Rightarrow C(2; -2)$$

$$\text{Mà } C(2; -2) \in (D): y = 2x + m \Rightarrow -2 = 2 \cdot 2 + m \Leftrightarrow m = -6$$

Vậy $m = -6$ là giá trị cần tìm

Câu 3: (1,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $A = (\sqrt{14} - \sqrt{2})\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{\frac{2}{8 + 3\sqrt{7}}}(9 + 3\sqrt{7})$

Giải:

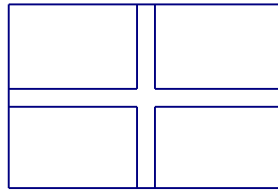
$$\text{Ta có: } A = (\sqrt{14} - \sqrt{2})\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{\frac{2}{8 + 3\sqrt{7}}}(9 + 3\sqrt{7})$$

$$= (\sqrt{7} - \sqrt{2})\sqrt{2}\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{\frac{2}{8 + 3\sqrt{7}}}(9 + 3\sqrt{7}) = (\sqrt{7} - \sqrt{2})\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} - \sqrt{\frac{4}{16 + 6\sqrt{7}}}(9 + 3\sqrt{7})$$

$$= (\sqrt{7} - \sqrt{2})\sqrt{(\sqrt{7} + 1)^2} - \sqrt{\left(\frac{2}{3 + \sqrt{7}}\right)^2}(9 + 3\sqrt{7}) = (\sqrt{7} - \sqrt{2})|\sqrt{7} + 1| - \left|\frac{2}{3 + \sqrt{7}}\right|(9 + 3\sqrt{7})$$

$$= (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + 1) - \frac{2}{3 + \sqrt{7}} \cdot 3(3 + \sqrt{7}) = 7 + \sqrt{7} - \sqrt{14} - \sqrt{2} - 6 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{14}$$

- b) Một vườn hoa hình chữ nhật có chiều dài 30m và chiều rộng 20m. Người ta làm hai con đường bề rộng 2m hình chữ thập (như hình vẽ). Hãy tính diện tích còn lại để trồng hoa



Giải:

Diện tích vườn hoa hình chữ nhật là: $30.20 = 600 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích con đường nằm ngang là: $30.2 = 60 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích con đường nằm dọc là: $(20 - 2).2 = 36 \text{ (m}^2\text{)}$

Vậy diện tích còn lại để trồng hoa là: $600 - 60 - 36 = 504 \text{ (m}^2\text{)}$

Câu 4: (1,5 điểm) Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - m - 1 = 0$ (x là ẩn số)

- a) Tìm m để phương trình trên có nghiệm

Giải:

Ta có $\Delta' = [-(m-1)]^2 - 1.(m^2 - m - 1) = m^2 - 2m + 1 - m^2 + m + 1 = 2 - m$

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$

- b) Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $(x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 13$

Giải:

Theo câu a, với $m \leq 2$ phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2(m-1)}{1} = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - m - 1}{1} = m^2 - m - 1 \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có: $(x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 13$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1 x_2 - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 x_2 - 9x_1 x_2 + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 9x_1 x_2 + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2m - 2)^2 - 9(m^2 - m - 1) + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(4m^2 - 8m + 4) - 9(m^2 - m - 1) + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 - 16m + 8 - 9m^2 + 9m + 9 + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 - 7m + 30 = 0 \text{ (*)}$$

Ta có $\Delta = (-7)^2 - 4.(-1).30 = 49 + 120 = 169 > 0; \sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt:

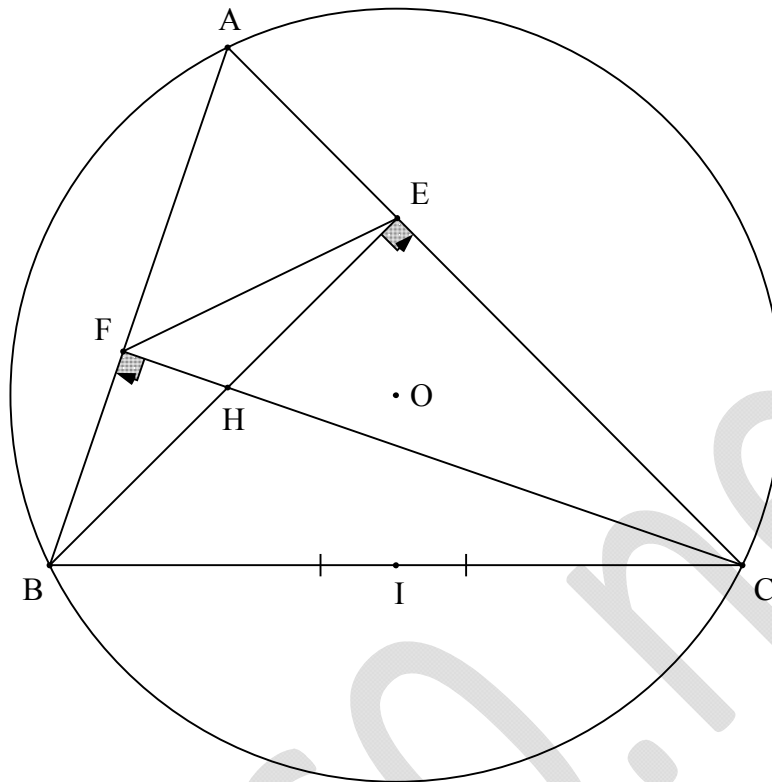
$$m_1 = \frac{7+13}{2.(-1)} = -10 \text{ (nhận); } m_2 = \frac{7-13}{2.(-1)} = 3 \text{ (loại)}$$

Vậy $m = -10$ là giá trị cần tìm

Câu 5: (3,5 điểm) Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O. Các đường cao BE, CF giao nhau tại H

- a) Chứng minh tứ giác BCEF nội tiếp được trong đường tròn, xác định tâm I của đường tròn này

Giải:



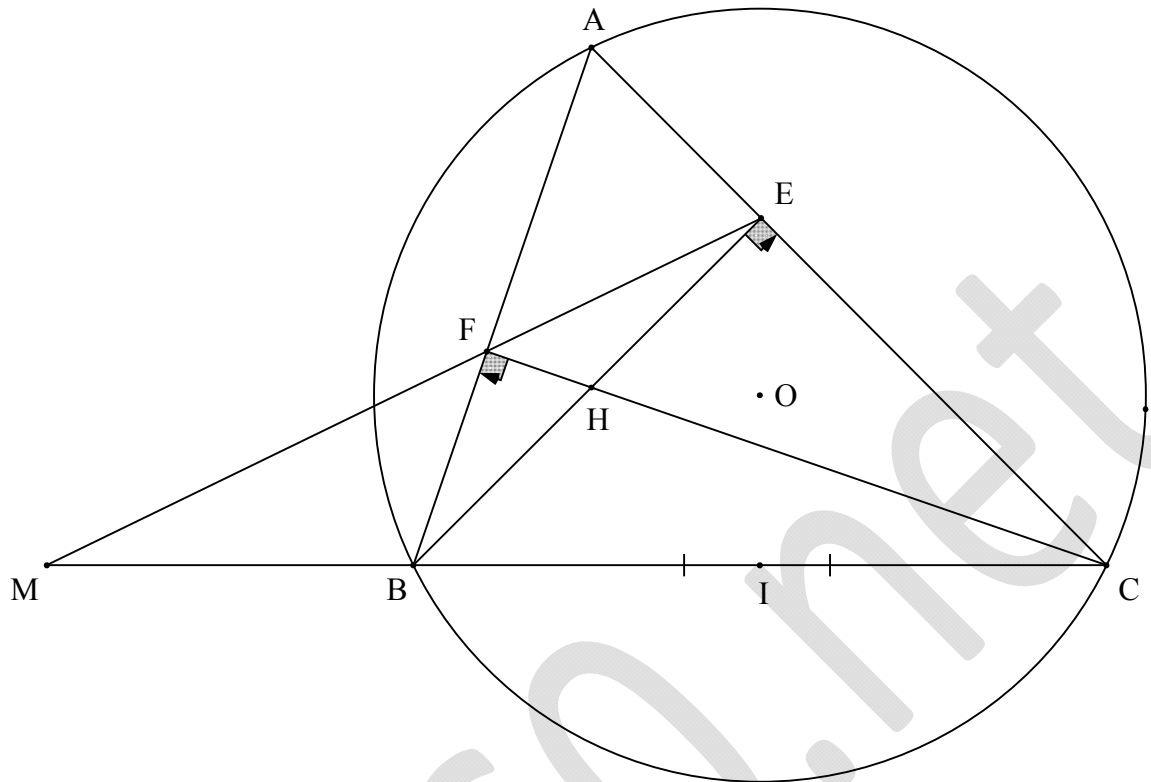
Xét tứ giác BCEF có:

Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ (vì $BE \perp AC, CF \perp AB$)

\Rightarrow Tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC và tâm I là trung điểm của BC

b) Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại M. Chứng minh: $MF \cdot ME = MB \cdot MC$

Giải:



Xét ΔMFB và ΔMCE có:

\widehat{BMF} : chung

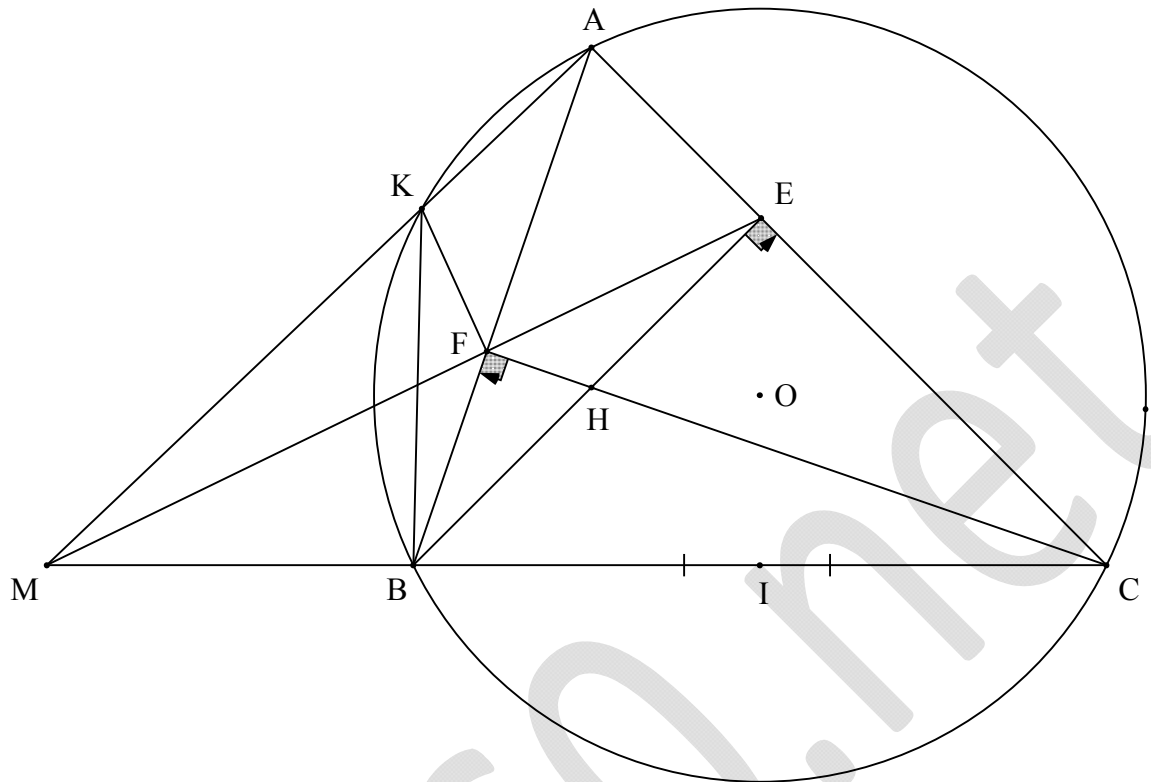
$\widehat{MFB} = \widehat{MCE}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác BFEC nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta MFB \sim \Delta MCE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MF}{MC} = \frac{MB}{ME} \Leftrightarrow MF \cdot ME = MB \cdot MC \quad (1)$$

c) AM cắt đường tròn (O) tại K. Chứng minh tứ giác KFEA nội tiếp

Giải:



Xét ΔMKB và ΔMCA có:

\widehat{BMK} : chung

$\widehat{MKB} = \widehat{MCA}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác AKBC nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta MKB \sim \Delta MCA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MK}{MC} = \frac{MB}{MA} \Leftrightarrow MK \cdot MA = MB \cdot MC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MF \cdot ME = MK \cdot MA$ (3)

Xét ΔMKF và ΔMEA có:

\widehat{KMF} : chung

$$\frac{MF}{MA} = \frac{MK}{ME} \quad (\text{do (3)})$$

$\Rightarrow \Delta MKF \sim \Delta MEA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MKE} = \widehat{MEA}$ (2 góc tương ứng)

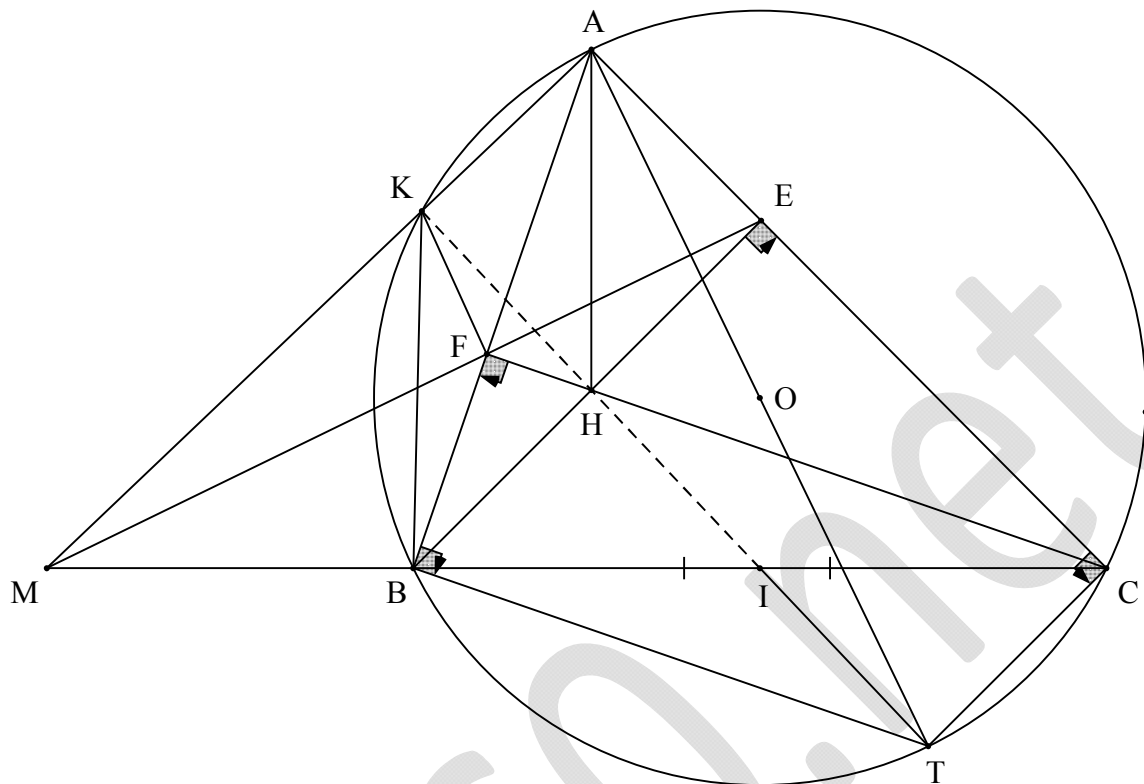
$$\Leftrightarrow \widehat{MKF} = \widehat{FEA} \quad (4)$$

Xét tứ giác KFEA có: $\widehat{MKF} = \widehat{FEA}$ (do (4))

\Rightarrow Tứ giác KFEA nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

d) Chứng minh 3 điểm K, H, I thẳng hàng

Giải:



Kẻ đường kính AT của đường tròn (O)

Ta có $\widehat{ABT} = \widehat{ACT} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow TB \perp AB, TC \perp AC$

Xét tứ giác BHCT có:

$BH \parallel TC$ (cùng vuông góc với AC: quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song)

$CH \parallel TB$ (cùng vuông góc với AB: quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song)

\Rightarrow Tứ giác BHCT là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành)

Mà I là trung điểm của BC nên I cũng là trung điểm của TH

$\Rightarrow T, I, H$ thẳng hàng (*)

Xét tứ giác AEHF có:

$\widehat{EH} + \widehat{FH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ (vì $BE \perp AC, CF \perp AB$)

\Rightarrow Tứ giác AEHF nội tiếp (5) (tổng 2 góc đối bằng 180°)

Mà tứ giác AKFE nội tiếp (6) (cmt)

Từ (5) và (6) \Rightarrow 5 điểm A, K, F, H, E cùng thuộc đường tròn (AEF)

$\Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ (cùng chắn cung AH)

$= \widehat{AKT}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

\Rightarrow 3 điểm T, H, K thẳng hàng (**)

Từ (*) và (**) \Rightarrow 3 điểm K, H, I thẳng hàng