BÀI GIẢI

Câu 1: (2 điểm)

a) Giải phương trình sau: $5x^2-2\sqrt{2}x+1=2\frac{1}{2}$ (1)

Giải:

$$(1)\Leftrightarrow 5x^2-2\sqrt{2}x+1=\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow 10x^2-4\sqrt{2}x+2=5$$
$$\Leftrightarrow 10x^2-4\sqrt{2}x-3=0$$

Ta có $\Delta'=\left(-2\sqrt{2}\right)^2-10.(-3)=8+30=38$

Do $\Delta'>0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{2\sqrt{2}+38}{10}=\frac{\sqrt{2}+19}{5};x_2=\frac{2\sqrt{2}-38}{10}=\frac{\sqrt{2}-19}{5}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\left\{\frac{\sqrt{2}+19}{5};\frac{\sqrt{2}-19}{5}\right\}$

b) Trong một buổi sinh hoạt ngoại khóa. Số học sinh nam nhiều hơn số học sinh nữ là 15 em. Khi tham gia trò chơi có 24 bạn nam và 24 bạn nữ tham gia. Số bạn nam không tham gia gấp đôi số bạn nữ không tham gia. Hỏi trong buổi sinh hoạt ngoại khóa có bao nhiêu bạn nam? Bao nhiêu bạn nữ?

Giải:

Gọi x, y lần lượt là số bạn nam và số bạn nữ tham gia buổi sinh hoạt ngoại khóa (x > 0; y > 0)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x-y=15\\(x-24)=2(y-24)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=15\\-x+2y=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-39=15\\y=39\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=54\\y=39\end{cases}\text{ (nhận)}$$

Vậy buổi sinh hoạt ngoại khóa có 54 bạn nam và 39 bạn nữ

Câu 2: (1,5 điểm) Cho $(P): y=-\frac{1}{4}x^2$

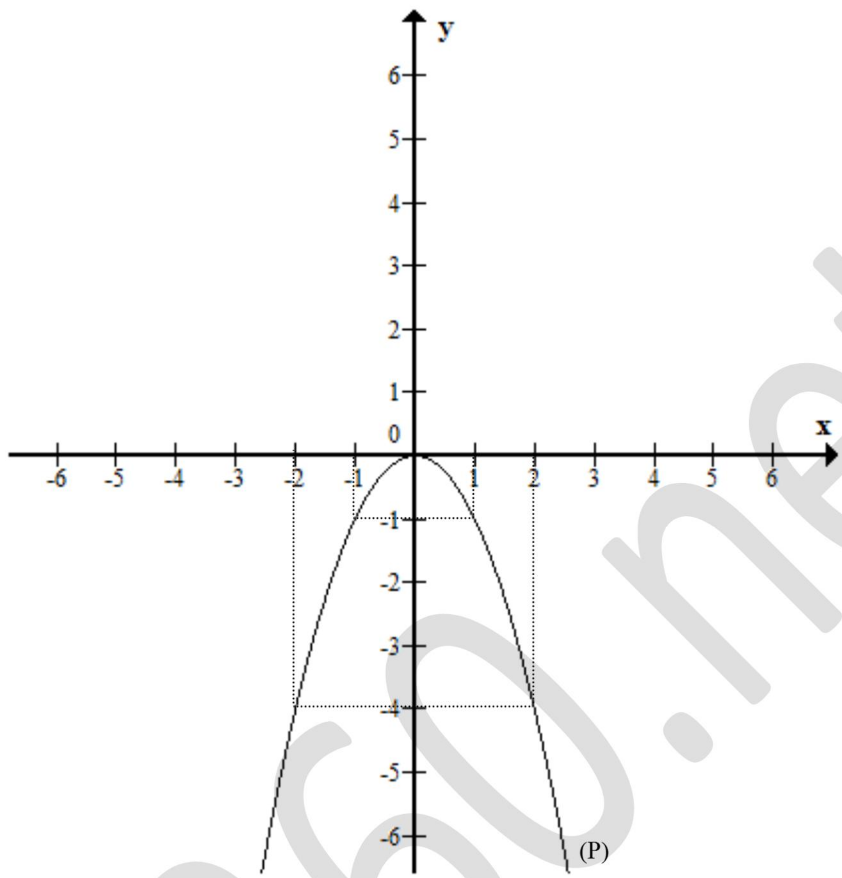
a) Vẽ (P)

Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y=-\frac{x^2}{4}$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị



b) Cho đường thẳng $(D): y = 2mx - 3m\ (m \neq 0)$. Tìm giá trị m để (D) cắt (P) tại điểm có hoành độ dương và tung độ bằng -1

Giải:

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (D) và (P)

Theo đề bài, ta có: $x_0 > 0; y_0 = -1 \Rightarrow M(x_0; -1)\ (x_0 > 0)$

Mà $M(x_0; -1) \in (P): y = -\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow -1 = -\frac{1}{4}x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2$ (vì $x_0 > 0$) $\Rightarrow M(2; -1)$

Ta lại có: $M(2; -1) \in (D): y = 2mx - 3m \Rightarrow -1 = 4m - 3m \Leftrightarrow m = -1$ (nhận)

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm

Câu 3: (1,5 điểm)

a) Thu gọn biểu thức sau: $\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{26+3\sqrt{35}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \dfrac{8+2\sqrt{35}}{\sqrt{5}-1}$

Giải:

Ta có: $\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{26+3\sqrt{35}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \dfrac{8+2\sqrt{35}}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{2}\sqrt{26+3\sqrt{35}}}{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \dfrac{8+2\sqrt{35}}{\sqrt{5}-1}$

$= \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{52+6\sqrt{35}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \dfrac{8+2\sqrt{35}}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{(3\sqrt{5}+\sqrt{7})^2}}{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \dfrac{8+2\sqrt{35}}{\sqrt{5}-1}$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left|3\sqrt{5}+\sqrt{7}\right|}{\left|\sqrt{5}+1\right|}+\frac{8+2\sqrt{35}}{\sqrt{5}-1}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\sqrt{5}+1}+\frac{8+2\sqrt{35}}{\sqrt{5}-1}$$

$$=\frac{15+\sqrt{35}-3\sqrt{35}-7}{\sqrt{5}+1}+\frac{8+2\sqrt{35}}{\sqrt{5}-1}=\frac{8-2\sqrt{35}}{\sqrt{5}+1}+\frac{8+2\sqrt{35}}{\sqrt{5}-1}$$

$$=\frac{\left(8-2\sqrt{35}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(8+2\sqrt{35}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{8\sqrt{5}-8-10\sqrt{7}+2\sqrt{35}+8\sqrt{5}+8+10\sqrt{7}+2\sqrt{35}}{5-1}$$

$$=\frac{16\sqrt{5}+4\sqrt{35}}{4}=4\sqrt{5}+\sqrt{35}$$

b) Bác An đi xe Taxi của hãng xe Vinasun từ quận 8 sang TP Biên Hòa thuộc tỉnh Bình Dương trên quãng đường dài 50km. Tiền cước Taxi được tính như sau: giá mở cửa 12000 đồng/500m, giá cước các km tiếp theo là 16000 đồng/1km, từ km thứ 31 trở đi giá cước 14200đồng/1km. Em hãy tính xem bác An đã trả hết bao nhiêu tiền cước Taxi?

Giải:

Ta có 50km = 0,5km + 29,5km + 20km

Số tiền mà bác An phải trả hết là: $0{,}5.12000+29{,}5.16000+20.14200=762000$ (đồng)

Câu 4: (1,5 điểm) Cho phương trình: $x^2-2mx-m-1=0$ (x là ẩn số)

a) Chứng tỏ phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m

Giải:

Ta có $\Delta'=(-m)^2-1.(-m-1)=m^2+m+1=\left(m^2+2.m.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$\geq\frac{3}{4}>0,\forall m$ (vì $\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0,\forall m$)

Do $\Delta'>0,\forall m$ nên phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m

b) Tìm m để $x_1^2+2mx_2-m+\frac{1}{x_2^2+2mx_1-m}=2$

Giải:

Theo câu a, với mọi m phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-2m}{1}=2m\\ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-m-1}{1}=-m-1\end{cases}$$

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình nên ta có hệ nghiệm:

$$\begin{cases}x_1^2-2mx_1-m-1=0\\ x_2^2-2mx_2-m-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2=2mx_1+m+1\\ x_2^2=2mx_2+m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2+2mx_2-m=2mx_1+m+1+2mx_2-m\\ x_2^2+2mx_1-m=2mx_2+m+1+2mx_1-m\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2+2mx_2-m=2m(x_1+x_2)+1\\ x_2^2+2mx_1-m=2m(x_1+x_2)+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2+2mx_2-m=2m(2m)+1=4m^2+1\\ x_2^2+2mx_1-m=2m(2m)+1=4m^2+1\end{cases}$$ (do hệ thức Vi-ét)

Theo đề bài, ta có: $x_1^2+2mx_2-m+\frac{1}{x_2^2+2mx_1-m}=2$

$\Leftrightarrow 4m^2+1+\frac{1}{4m^2+1}=2$ (do trên)

$\Leftrightarrow (4m^2+1)^2 + 1 = 2(4m^2+1)$ (vì $4m^2+1 \geq 1 > 0, \forall m$)

$\Leftrightarrow 16m^4 + 8m^2 + 1 + 1 = 8m^2 + 2$

$\Leftrightarrow 16m^4 = 0$

$\Leftrightarrow m^4 = 0$

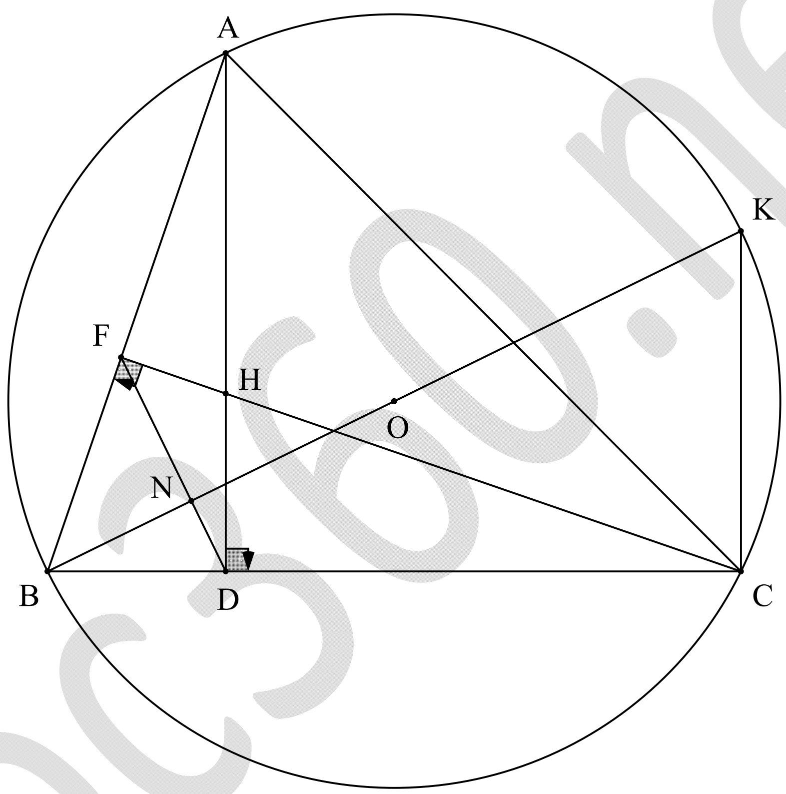
$\Leftrightarrow m = 0$

Vậy m = 0 là giá trị cần tìm

Câu 5: (3,5 điểm) Cho ΔABC (AB < AC) nhọn nội tiếp (O). Vẽ các đường cao AD và CF của ΔABC cắt nhau tại H. Đường kính BK của đường tròn(O) cắt DF tại N

a) Chứng minh: Tứ giác AFDC và CKND nội tiếp

Giải:



Xét tứ giác AFDC có:

$\widehat{ADC} = \widehat{AFC} = 90^0$ (vì AD ⊥ BC, CF ⊥ AB)

⇒ Tứ giác AFDC nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh D, F liên tiếp cùng nhìn cạnh AC dưới 1 góc vuông)

Ta có $\widehat{FDB} = 90^0 - \widehat{FDA}$ (2 góc phụ nhau)

$= 90^0 - \widehat{FCA}$ (cùng chắn cung FA của tứ giác AFDC nội tiếp)

$= \widehat{FAC}$ (2 góc phụ nhau)

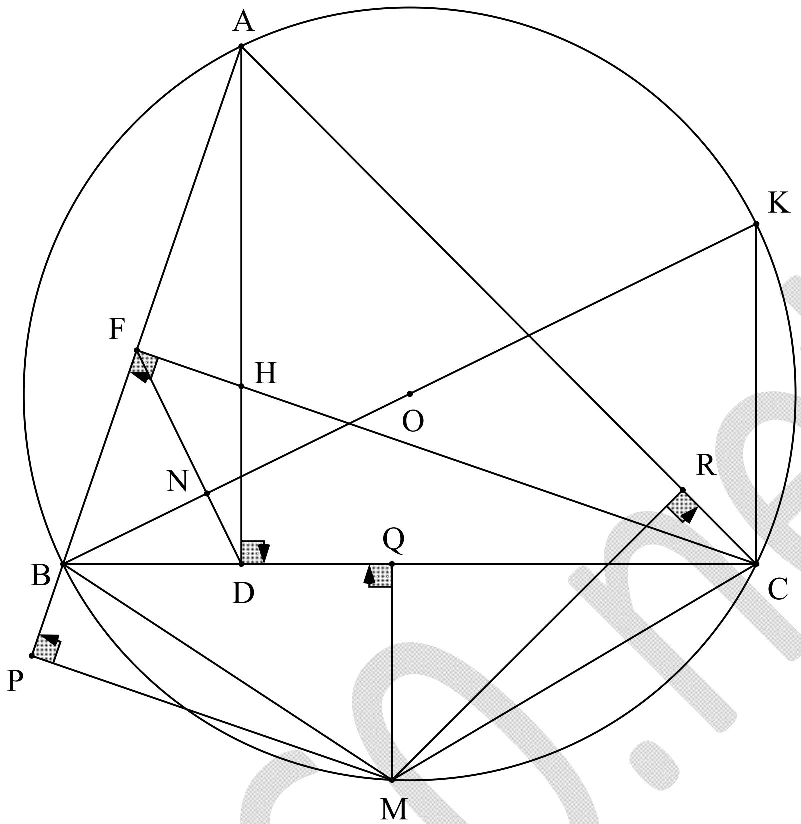
$= \widehat{NKC}$ (1) (cùng chắn cung BC của đường tròn (O))

Xét tứ giác CKND có: $\widehat{FDB} = \widehat{NKC}$ (do (1))

⇒ Tứ giác CKND nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

b) Lấy điểm M trên cung nhỏ BC, kẻ MP ⊥ AB, MQ ⊥ BC, MR ⊥ AC. Chứng minh: MB.MR = MP.MC

Giải:



Xét ΔMPB và ΔMRC có:

$\widehat{MPB} = \widehat{MRC} = 90^0$ (vì $MP \perp AB$, $MR \perp AC$)

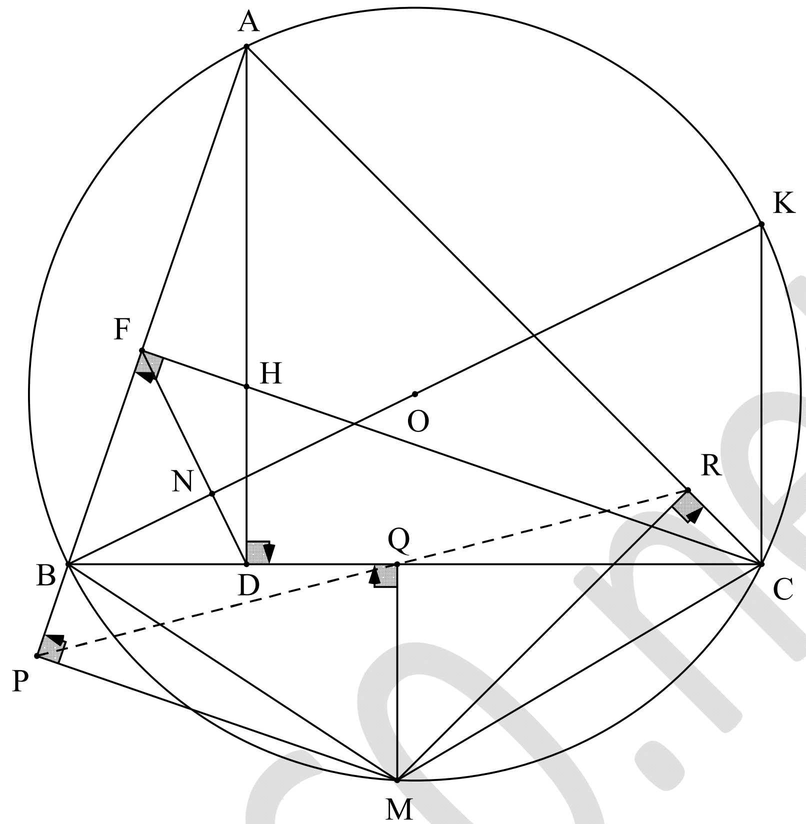
$\widehat{MBP} = \widehat{MCR}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác ABMC nội tiếp (O))

$\Rightarrow \Delta MPB \backsim \Delta MRC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MP}{MR} \Leftrightarrow MB.MR = MP.MC$

c) Chứng minh: ba điểm P, Q, R thẳng hàng

Giải:



Xét tứ giác BQMP có:

$\widehat{BQM}+\widehat{BPM}=90^0+90^0=180^0$ (vì $MP\perp AB$, $MQ\perp BC$)

$\Rightarrow$ Tứ giác BQMP nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

Xét tứ giác CRQM có:

$\widehat{CRM}=\widehat{CQM}=90^0$ (vì $MR\perp AC$, $MQ\perp BC$)

$\Rightarrow$ Tứ giác CRQM nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh R, Q liên tiếp cùng nhìn cạnh CM dưới 1 góc vuông)

Ta có $\widehat{PQR}=\widehat{PQM}+\widehat{MQR}$

$=\widehat{PBM}+\widehat{MQR}$ (cùng chắn cung PM của tứ giác BQMP nội tiếp)

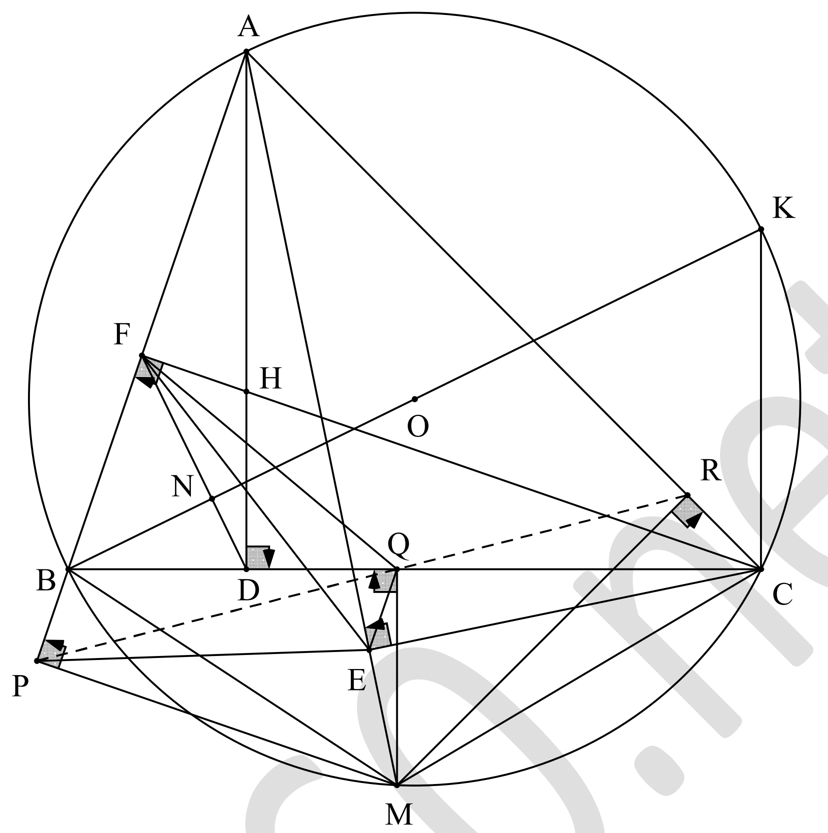
$=\widehat{MCR}+\widehat{MQR}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác ABMC nội tiếp (O))

$=180^0$ (tổng 2 góc đối của tứ giác CRQM nội tiếp)

$\Rightarrow$ 3 điểm P, Q, R thẳng hàng

d) Gọi E là hình chiếu của C trên AM. Chứng minh: PQ = EF

Giải:



Xét tứ giác AFEC có:

$\widehat{AFC} = \widehat{AEC} = 90^0$ (vì CF ⊥ AB, CE ⊥ AM)

⇒ Tứ giác AFEC nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh F, E liên tiếp cùng nhìn cạnh AC dưới 1 góc vuông)

Xét tứ giác MEQC có:

$\widehat{MEC} = \widehat{MQC} = 90^0$ (vì CE ⊥ AM, MQ ⊥ BC)

⇒ Tứ giác MEQC nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh E, Q liên tiếp cùng nhìn cạnh MC dưới 1 góc vuông)

Ta có $\widehat{QBE} = \widehat{EMC}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác MEQC nội tiếp)

$= \widehat{ABQ}$ (cùng chắn cung AC của đường tròn (O))

⇒ FP // EQ (2) (2 góc bằng nhau và ở vị trí so le trong: dấu hiệu nhận biết 2 đường thẳng song song)

Xét tứ giác QEPF có: FP // EQ (do (2))

⇒ Tứ giác QEPF là hình thang (*)

⇒ $\widehat{FEQ} = \widehat{PFE}$ (2 góc ở vị trí so le trong)

$= \widehat{ACE}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác AFEC nội tiếp)

$= 90^0 - \widehat{EAC}$ (2 góc phụ nhau)

$= 90^0 - \widehat{MBQ}$ (cùng chắn cung MC của đường tròn (O))

$= \widehat{BMQ}$ (2 góc phụ nhau)

$= \widehat{FPQ}$ (3) (cùng chắn cung BQ của tứ giác BQMP nội tiếp)

Xét tứ giác QEPF có: $\widehat{FEQ} = \widehat{FPQ}$ (do (3))

⇒ Tứ giác QEPF nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh E, P liên tiếp cùng nhìn cạnh FQ dưới 1 góc bằng nhau)

Ta có $\widehat{FPE} = \widehat{FPQ} + \widehat{QPE}$

$= \widehat{FEQ} + \widehat{QPE}$ (do (3))

$= \widehat{PFE} + \widehat{QFE}$ (2 góc đồng vị; cùng chắn cung EQ)

$= \widehat{PFQ}$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ Tứ giác QEPF là hình thang cân (dấu hiệu nhận biết hình thang cân)

$\Rightarrow$ PQ = EF (tính chất 2 đường chéo hình thang cân)