BÀI GIẢI

Câu 1: (2 điểm)

a) Giải phương trình: $x(x-7)=5x-27$ (1)

Giải:

$(1) \Leftrightarrow x^2-7x=5x-27$

$\Leftrightarrow x^2-7x-5x+27=0$

$\Leftrightarrow x^2-12x+27=0$

Ta có $\Delta'=(-6)^2-1.27=36-27=9>0; \sqrt{\Delta'}=\sqrt{9}=3$

Do $\Delta'>0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{6+3}{1}=9; x_2=\frac{6-3}{1}=3$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\{3;9\}$

b) Một lớp học có 24 học sinh nữ và một số học sinh nam. Cuối năm tất cả đều đạt danh hiệu học sinh giỏi hoặc học sinh tiên tiến. Biết số học sinh nam đạt giỏi bằng số học sinh nữ đạt tiên tiến. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu học sinh đạt danh hiệu học sinh giỏi?

Giải:

Gọi x (học sinh) là số học sinh nữ đạt loại tiên tiến (0 < x < 24)

$\Rightarrow$ 24 – x (học sinh) là số học sinh nữ đạt loại giỏi

Số học sinh nam đạt loại giỏi là: x (học sinh)

Vậy lớp có tất cả số học sinh giỏi là: x + (24 – x) = 24 (học sinh)

Câu 2: (1,5 điểm)

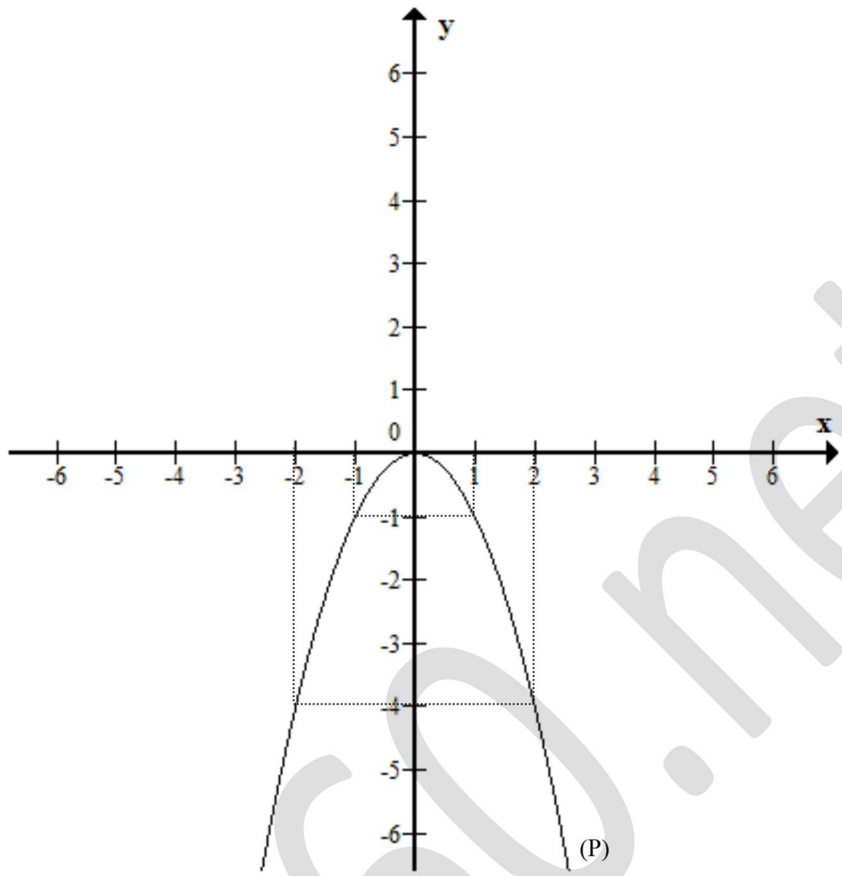
a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số: $y=\frac{-x^2}{4}$

Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y=-\frac{x^2}{4}$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị



b) Tìm m để đường thẳng $(d): y = mx + 1$ tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ tiếp điểm

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) có dạng: $-\dfrac{x^2}{4} = mx + 1$

$\Leftrightarrow -x^2 = 4mx + 4$

$\Leftrightarrow x^2 + 4mx + 4 = 0\ (*)$

Để (d) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ (*) có duy nhất một nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = 0$

$\Leftrightarrow (2m)^2 - 1.4 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 = 4$

$\Leftrightarrow m^2 = 1$

$\Leftrightarrow m = \pm 1$

Với m = 1 ta có $(*) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = -\dfrac{(-2)^2}{4} = -1$

Với $m = -1$ ta có $(*) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -\dfrac{2^2}{4} = -1$

Vậy với m = 1 thì tọa độ tiếp điểm là $A(-2;-1)$; với $m = -1$ thì tọa độ tiếp điểm là $B(2;-1)$

Câu 3: (1,5 điểm)

a) Thu gọn biểu thức: $M=\left(\sqrt{3+\sqrt{7}}-\sqrt{3-\sqrt{7}}\right).\sqrt{3+\sqrt{2}}$

Giải:

Ta có: $M=\left(\sqrt{3+\sqrt{7}}-\sqrt{3-\sqrt{7}}\right).\sqrt{3+\sqrt{2}}$ (vì $\sqrt{3-\sqrt{7}}>\sqrt{3-\sqrt{7}}$ nên M > 0)

$$\Rightarrow M^2=\left(3+\sqrt{7}-2\sqrt{3+\sqrt{7}}\sqrt{3-\sqrt{7}}+3-\sqrt{7}\right).\left(3+\sqrt{2}\right)$$

$$=\left(6-2\sqrt{9-7}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)=\left(6-2\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)=2\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)=2(9-2)=14$$

b) Ông An gửi tiết kiệm ngân hàng A một số tiền là 500 triệu đồng theo hình thức: có kì hạn 3 tháng (sau 3 tháng mới được rút tiền), lãi suất 5,2%/năm, lãi nhập gốc (sau 3 tháng Ông An không rút tiền ra thì tiền lãi sẽ nhập vào gốc ban đầu). Hỏi:

- Nếu Ông An gửi 1 năm thì số tiền nhận được khi rút ra là bao nhiêu?
- Để có số tiền ít nhất là 561 triệu đồng thì Ông An phải gửi bao nhiêu tháng?

Giải:

Nếu Ông An gửi 1 năm (4 x 3 tháng) thì số tiền nhận được khi rút ra là:

$$500000000\left(1+\frac{5{,}2\%}{4}\right)^4=526511408{,}3\text{ (đồng)}$$

Gọi x (tháng) là số tháng mà Ông An phải gửi để được số tiền là 561 triệu đồng (x > 0)

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$500000000\left(1+\frac{5{,}2\%}{4}\right)^{\frac{x}{3}}=561000000$$

$\Leftrightarrow x\approx 27$ (nhận)

Vậy Ông An cần phải gửi 27 tháng mới có số tiền 561 triệu đồng

Câu 4: (1,5 điểm) Cho phương trình: $2x^2-4mx+2m^2-m-3=0$ (x là ẩn) (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

Giải:

Ta có $\Delta'=(-2m)^2-2.\left(2m^2-m-3\right)=4m^2-4m^2+2m+6=2m+6$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow 2m+6>0\Leftrightarrow 2m>-6\Leftrightarrow m>-3$

Vậy $m>-3$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

b) Gọi x_1; x_2 là 2 nghiệm phương trình (1). Chứng minh: $x_1^2+x_2(5-4x_1)+5x_1+x_2^2=-2m^2+13m+9$

Giải:

Để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1; x_2 $\Leftrightarrow\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 2m+6\ge 0\Leftrightarrow 2m\ge -6\Leftrightarrow m\ge -3$

Với $m\ge -3$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1; x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-4m}{2}=2m \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2m^2-m-3}{2} \end{cases}$$

Ta có: $x_1^2+x_2(5-4x_1)+5x_1+x_2^2=x_1^2+5x_2-4x_1x_2+5x_1+x_2^2$

$$=\left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right)-6x_1x_2+5(x_1+x_2)$$

$$=(x_1+x_2)^2-6x_1x_2+5(x_1+x_2)$$

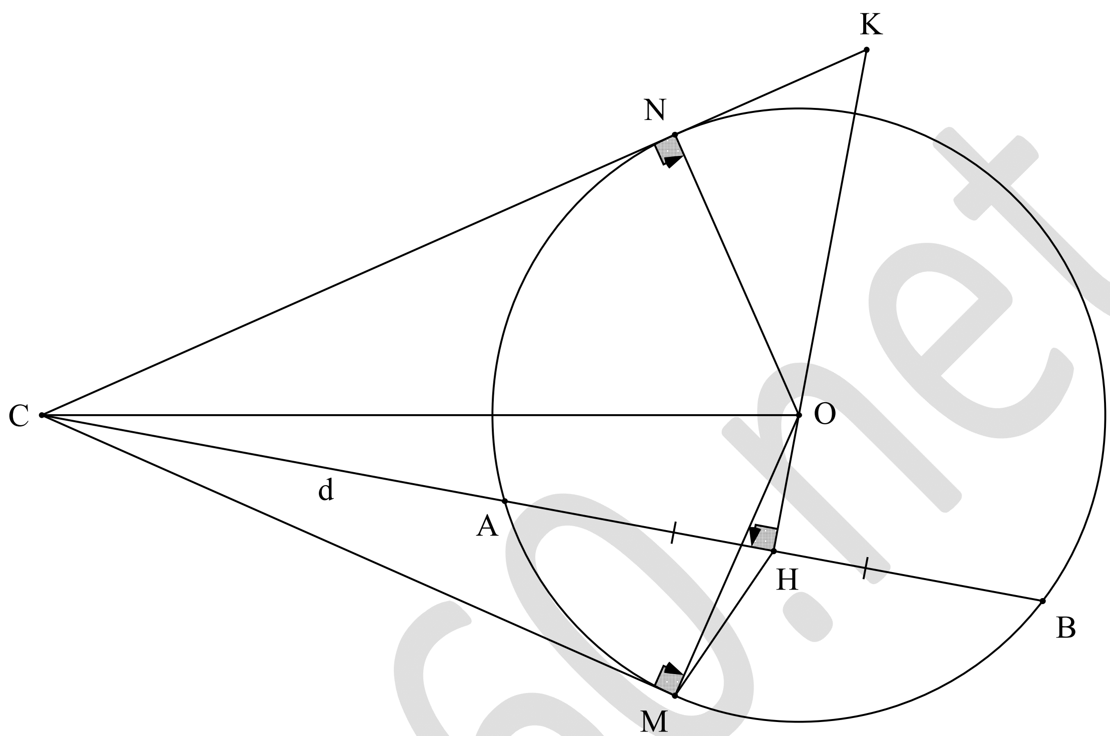
$$=(2m)^2-6\frac{2m^2-m-3}{2}+5.2m \text{ (do hệ thức Vi-ét)}$$

$$=4m^2-6m^2+3m+9+10m=-2m^2+13m+9$$

Câu 5: (3,5 điểm) Cho đường tròn (O; R) đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Từ điểm C trên d (C nằm ngoài đường tròn) kẻ 2 tiếp tuyến CM; CN với đường tròn (M; N là tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K

a) Chứng minh: 4 điểm C, O, H, M cùng thuộc một đường tròn

Giải:



Ta có H là trung điểm của AB và dây AB không qua tâm O

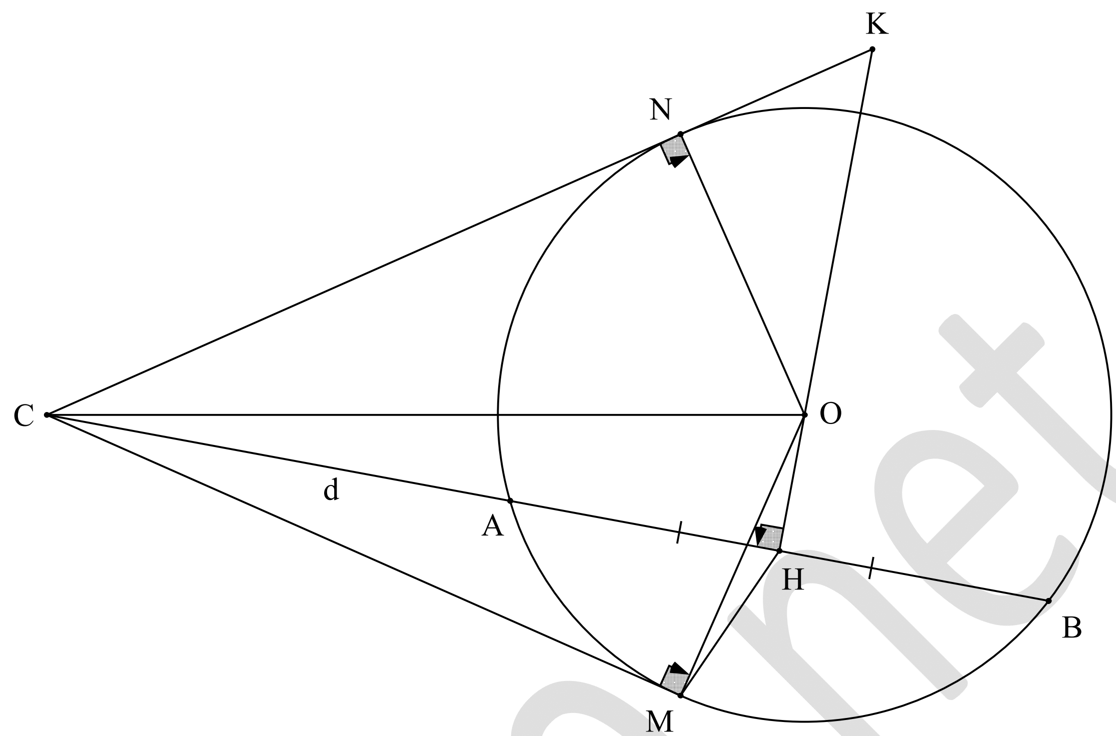
$\Rightarrow$ OH $\perp$ AB (liên hệ giữa đường kính và dây cung)

Ta có $C\hat{M}O = C\hat{H}O = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến; OH $\perp$ AB)

$\Rightarrow$ 4 điểm C, O, H, M cùng thuộc đường tròn đường kính OC

b) Chứng minh: KN.KC = KH.KO

Giải:



Xét ΔKNO và ΔKHC có:

$\widehat{NKO}$: chung

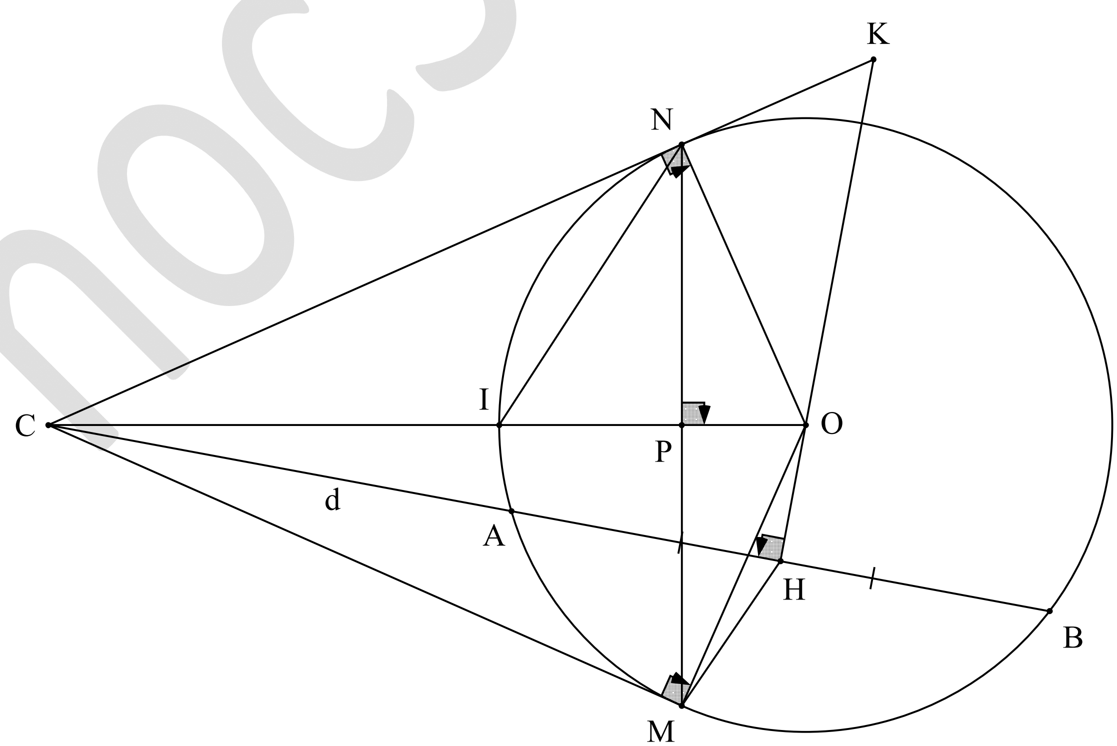
$\widehat{KNO} = \widehat{KHC} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến; $OH \perp AB$)

$\Rightarrow \Delta KNO \backsim \Delta KHC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{KN}{KH} = \dfrac{KO}{KC} \Leftrightarrow KN.KC = KH.KO$

c) Đoạn CO cắt (O) tại I. Chứng minh I cách điều CM; CN; MN

Giải:



Ta có CN = CM (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

ON = OM (= R)

$\Rightarrow$ CO là đường trung trực của đoạn thẳng MN

$\Rightarrow$ CO $\perp$ MN tại P

Ta có $\widehat{INC} = 90^0 - \widehat{INO}$ (2 góc phụ nhau)

$= 90^0 - \widehat{NIO}$ (vì ON = OI nên ΔONI cân tại O)

$= \widehat{INP}$ (2 góc phụ nhau)

$\Rightarrow$ NI là phân giác của góc CNM (1)

Mà CO là phân giác của góc MCN (2) (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

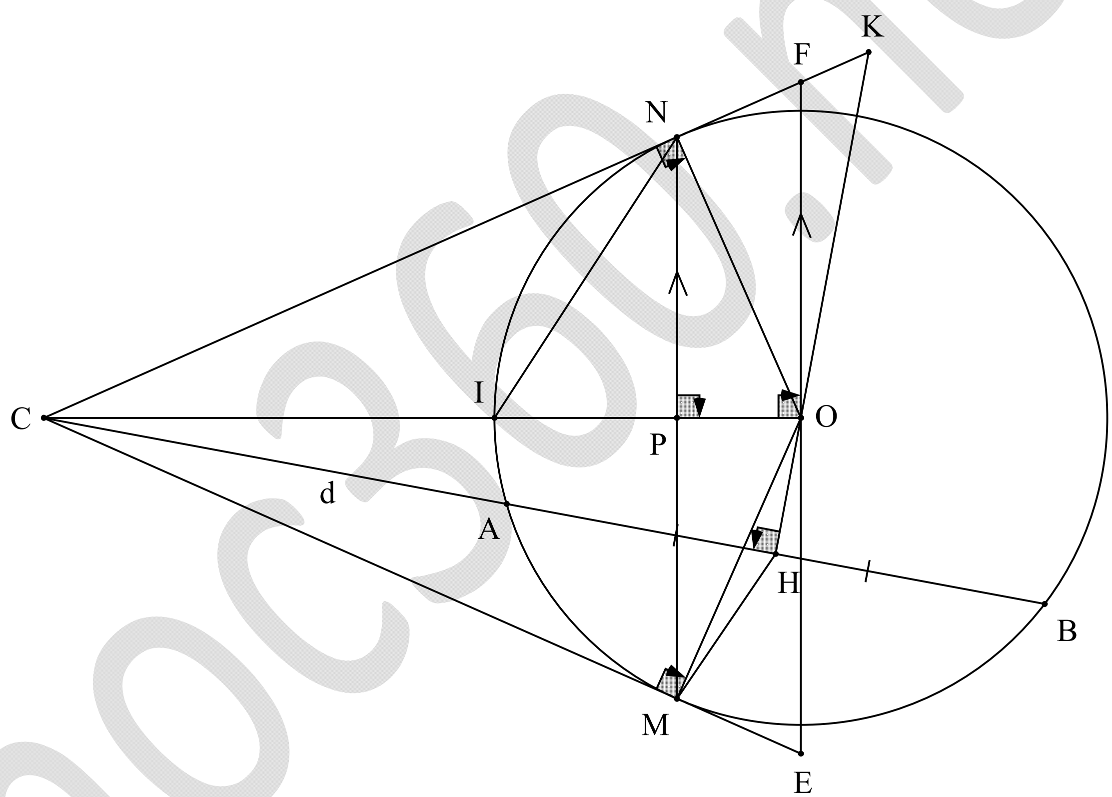
Xét ΔCMN có: NI và CO là 2 đường phân giác cắt nhau tại I

$\Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp ΔCMN

$\Rightarrow$ I cách điều 3 cạnh CM; CN; MN của ΔCMN

d) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất

Giải:



Ta có EF // MN (gt); CO $\perp$ MN (do trên)

$\Rightarrow$ CO $\perp$ EF tại O (quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song)

Xét ΔCOF và ΔCOE có:

$\widehat{COF} = \widehat{COE} = 90^0$ (vì CO $\perp$ EF)

CO: chung

$\widehat{OCF} = \widehat{OCE}$ (vì CO là phân giác của góc MCN)

$\Rightarrow$ ΔCOF = ΔCOE (ch.gn)

$\Rightarrow S_{CEF} = S_{COF} + S_{COE} = 2S_{COF}$ (vì ΔCOF = ΔCOE)

$= 2.\left(\frac{1}{2}ON.CF\right) = ON.CF = R.CF = R.(CN + NF)$

$\geq R.2\sqrt{CN.NF}$ (áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho CN và NF dương)

$= 2R\sqrt{ON^2} = 2R.ON = 2R.R = 2R^2$ (vì ΔCOF vuông tại O và có ON là đường cao nên ON^2 = CN.NF: hệ thức lượng)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi CN = NF $\Leftrightarrow$ N là trung điểm của CF

$\Rightarrow$ ΔCOF vuông tại O có: ON vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến

$\Rightarrow$ ΔCOF vuông cân tại O

$\Rightarrow O\hat{C}F = O\hat{F}C = \frac{90^0}{2} = 45^0$

$\Rightarrow \sin N\hat{C}O = \sin O\hat{C}F = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (tỉ số lượng giác góc nhọn trong ΔONC vuông tại N)

$\Leftrightarrow \frac{ON}{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{R}{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow OC = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow \text{Min}S_{CEF} = 2R^2$ xảy ra khi và chỉ khi OC = $R\sqrt{2}$

Vậy C là điểm thuộc d sao cho OC = $R\sqrt{2}$ thì diện tích tam giác CEF nhỏ nhất