BÀI GIẢI

Câu 1: (2 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $5x(x+1)=4(x^2+9)$ (1)

Giải:

$$(1)\Leftrightarrow 5x^2+5x=4x^2+36$$
$$\Leftrightarrow 5x^2+5x-4x^2-36=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+5x-36=0$$

Ta có $\Delta=5^2-4.1.(-36)=25+144=169>0;\sqrt{\Delta}=\sqrt{169}=13$

Do $\Delta>0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-5+13}{2.1}=4;x_2=\frac{-5-13}{2.1}=-9$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\{4;-9\}$

b) $x^2-\sqrt{5}=(1-\sqrt{5})x$ (2)

Giải:

$$(2)\Leftrightarrow x^2-(1-\sqrt{5})x-\sqrt{5}=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+(\sqrt{5}-1)x-\sqrt{5}=0$$

Ta có $a+b+c=1+(\sqrt{5}-1)+(-\sqrt{5})=0$ nên phương trình (2) có 2 nghiệm:

$$x_1=1;x_2=\frac{c}{a}=\frac{-\sqrt{5}}{1}=-\sqrt{5}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là: $S=\{1;-\sqrt{5}\}$

c) $x^2(x^2+1)=2(x^2+6)$ (3)

Giải:

$$(3)\Leftrightarrow x^4+x^2=2x^2+12$$
$$\Leftrightarrow x^4+x^2-2x^2-12=0$$
$$\Leftrightarrow x^4-x^2-12=0$$

Đặt $t=x^2$ $(t\ge 0)$

Phương trình (3) trở thành: $t^2-t-12=0$ (*)

Ta có $\Delta=(-1)^2-4.1.(-12)=1+48=49>0;\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

Do $\Delta>0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$t_1=\frac{1+7}{2.1}=4 \text{ (nhận)};\ t_2=\frac{1-7}{2.1}=-3 \text{ (loại)}$$

Với $t_1=4\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$

Vậy tập nghiệm của phương trình (3) là: $S=\{2;-2\}$

d) $\begin{cases} x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=5 \\ 2x\sqrt{2}-3y\sqrt{3}=-5 \end{cases}$ (4)

Giải:

$$(4)\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{2}x+3\sqrt{3}y=15 \\ 2\sqrt{2}x-3\sqrt{3}y=-5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{2}x=10 \\ 2\sqrt{2}x-3\sqrt{3}y=-5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ 4-3\sqrt{3}y=-5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình (4) là: $(x;y=)(\sqrt{2};\sqrt{3})$

Câu 2: (1,5 điểm)

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $(D): y = \frac{1}{2}x + 3$ trên cùng mặt phẳng tọa độ

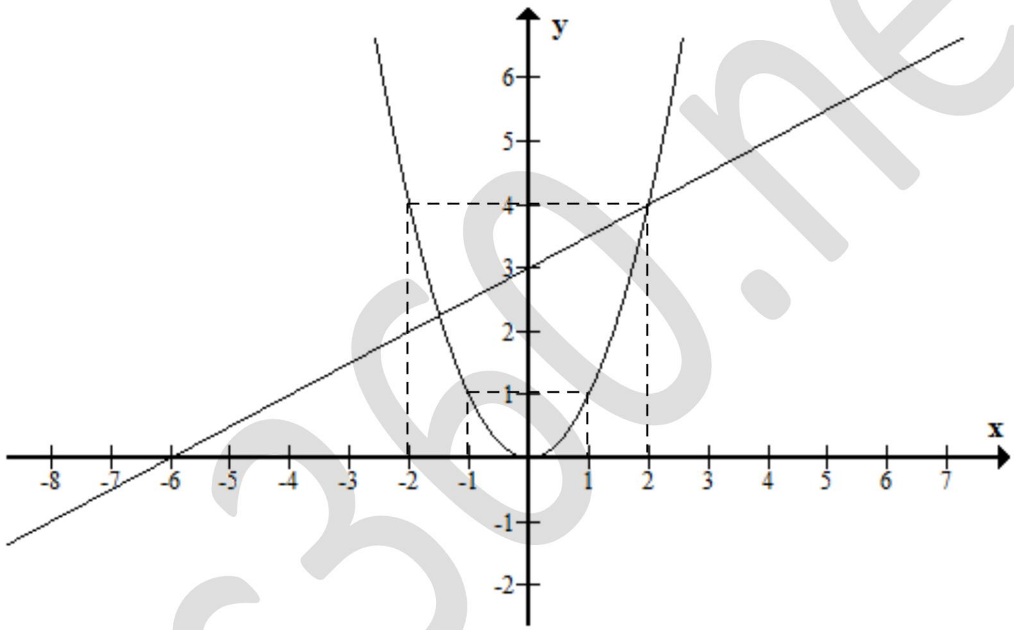
Giải:

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

x	0	-6
$y = \frac{1}{2}x + 3$	3	0

Vẽ đồ thị



b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (D) bằng phép toán

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) có dạng: $x^2 = \frac{1}{2}x + 3$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2} + \frac{6}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 = x + 6$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0\ (5)$

Ta có $\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-6) = 1 + 24 = 25 > 0; \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (5) có 2 nghiệm phân biệt:

$x_1 = \frac{1+5}{2.1} = 3; x_2 = \frac{1-5}{2.1} = -2$

+ Với $x_1 = 3$ ta có $y_1 = 3^2 = 9$

+ Với $x_2 = -2$ ta có $y_2 = (-2)^2 = 4$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (D) là: $A(3;9), B(-2;4)$

Câu 3: (1 điểm) Thu gọn các biểu thức sau:

a) $A=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}-\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}\right):\sqrt{3}$

Giải:

Ta có: $A=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}-\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}\right):\sqrt{3}$

$$=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}-\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}}\right).\frac{1}{\sqrt{3}}=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\left|2-\sqrt{3}\right|}-\frac{2-\sqrt{3}}{\left|2+\sqrt{3}\right|}\right).\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right).\frac{1}{\sqrt{3}}\ (\text{vì } 2-\sqrt{3}>0; 2+\sqrt{3}>0)$$

$$=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}.\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4+2\sqrt{3}+3-\left(4-2\sqrt{3}+3\right)}{4-3}.\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}+3-4+2\sqrt{3}-3}{1}.\frac{1}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}=4$$

b) $B=\frac{x-10}{x-\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ (với $x\ge 0; x\ne 4$)

Giải:

Ta có $B=\frac{x-10}{x-\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

$$=\frac{x-10}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{x-10-\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{x-10-\left(x-1\right)+\left(x-4\sqrt{x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{x-10-x+1+x-4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{x-4\sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}$$

Câu 4: (1,5 điểm) Cho phương trình: $x^2-mx+m-1=0$

a) Tìm m để phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

Giải:

Ta có $\Delta=\left(-m\right)^2-4.1.\left(m-1\right)=m^2-4m+4=\left(m-2\right)^2$

Để phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m $\Leftrightarrow \Delta>0,\forall m$

$$\Leftrightarrow \left(m-2\right)^2>0,\forall m \Leftrightarrow m-2\ne 0 \Leftrightarrow m\ne 2$$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $m\ne 2$

b) Tính tổng và tích của 2 nghiệm theo m

Giải:

Theo câu a, ta có $\Delta=\left(m-2\right)^2\ge 0,\forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm thỏa hệ thức Vi-ét:

Tổng 2 nghiệm là: $S = -\frac{b}{a} = -\frac{-m}{1} = m$

Tích 2 nghiệm là: $P = \frac{c}{a} = \frac{m-1}{1} = m-1$

c) Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Tìm m để $A = \frac{2x_1x_2 + 7 - 2x_1 - 2x_2}{x_1^2x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$ đạt giá trị lớn nhất

Giải:

Ta có: $A = \frac{2x_1x_2 + 7 - 2x_1 - 2x_2}{x_1^2x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)} = \frac{2x_1x_2 + 7 - 2(x_1 + x_2)}{(x_1x_2)^2 + 2(1 + x_1x_2)}$

$= \frac{2(m-1) + 7 - 2m}{(m-1)^2 + 2(1 + m - 1)} = \frac{2m - 2 + 7 - 2m}{m^2 - 2m + 1 + 2m} = \frac{5}{m^2 + 1}$

Ta có $m^2 \geq 0, \forall m \Leftrightarrow m^2 + 1 \geq 1, \forall m \Leftrightarrow \frac{1}{m^2 + 1} \leq 1, \forall m \Leftrightarrow \frac{5}{m^2 + 1} \leq 5, \forall m \Leftrightarrow A \leq 5, \forall m$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Giá trị lớn nhất của biểu thức A là: $\text{Max}A = 5$ khi và chỉ khi m = 0

Câu 5: (0,5 điểm) Bà Hoa gửi số tiền ban đầu là một trăm triệu đồng với lãi suất 0,5% một tháng (không kỳ hạn). Một thời gian sau bà Hoa rút tiền ra và được khoảng một trăm lẻ năm triệu đồng. Hỏi bà Hoa đã gửi tiền trong thời gian bao lâu?

Giải:

Gọi x (tháng) là thời gian bà Hoa gửi tiền trong ngân hàng (x > 0)

Số tiền cả vốn lẫn lãi sau khi ba Hoa rút ra là: $100000000(1 + 0,5\%)^x$ (đồng)

Theo đề bài, ta có phương trình:

$100000000(1 + 0,5\%)^x = 105000000$

$\Leftrightarrow (1 + 0,5\%)^x = 1,05$

$\Leftrightarrow (1,005)^x \approx 1,005^{10}$

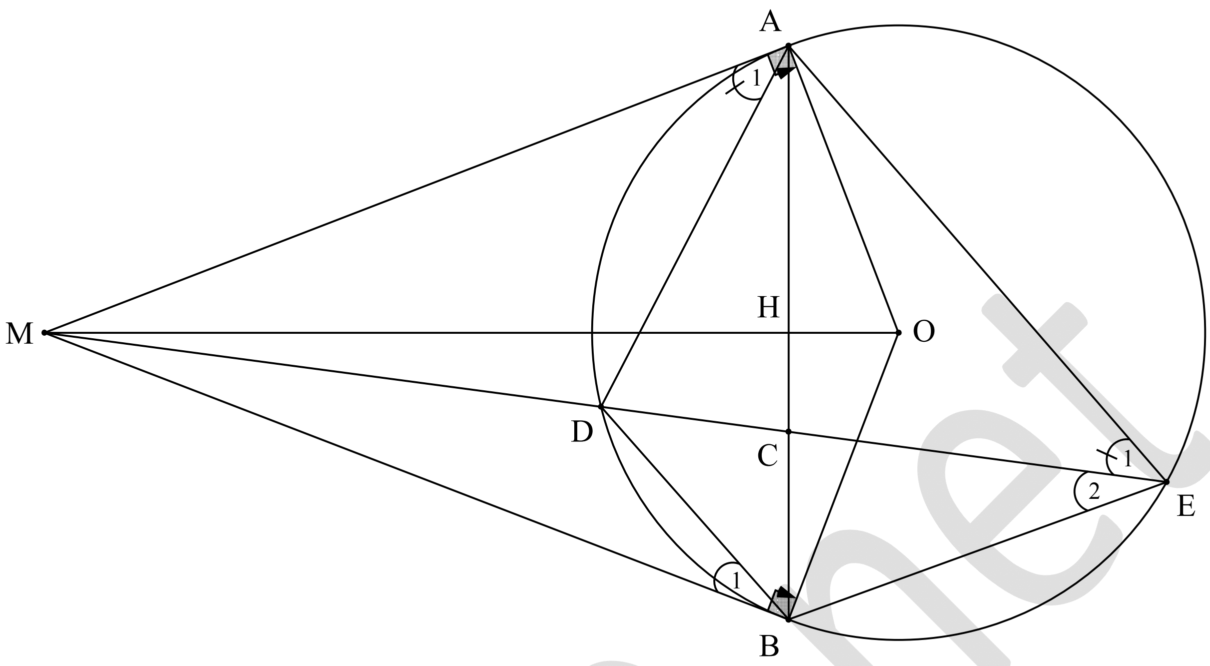
$\Leftrightarrow x = 10$ (nhận)

Vậy bà Hoa gửi trong thời gian khoảng 10 tháng

Câu 6: (3,5 điểm) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O; R) (OM > 2R) (A, B là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OM và AB. Lấy C thuộc đoạn HB. Đường thẳng MC cắt (O) tại D và E (D nằm giữa M và C)

a) Chứng minh: AD.BE = AE.BD

Giải:



Xét ΔMAD và ΔMEA có:

$A\hat{M}D$: chung

$\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta MAD \backsim \Delta MEA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{MD}{MA}$ (1)

Xét ΔMBD và ΔMEB có:

$B\hat{M}D$: chung

$\hat{B}_1 = \hat{E}_2$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta MBD \backsim \Delta MEB$ (g.g)

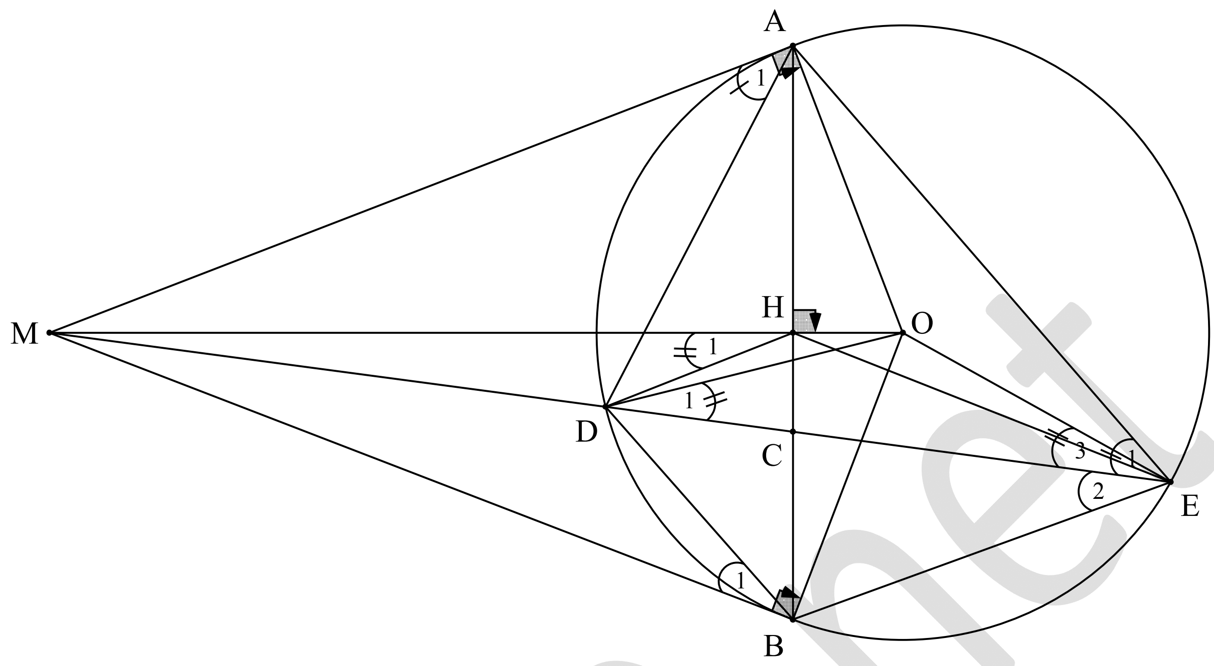
$\Rightarrow \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{MD}{MB}$ (2)

Ta có MA = MB (3) (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{BD}{BE} \Leftrightarrow AD.BE = AE.BD$

b) Chứng minh tứ giác OHDE nội tiếp. Chứng minh: CD.ME = CE.MD

Giải:



Ta có MA = MB (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

OA = OB = R

$\Rightarrow$ MO là đường trung trực của đoạn thẳng AB

$\Rightarrow$ MO $\perp$ AB tại H

Ta có ΔMAO vuông tại A và có AH là đường cao

$\Rightarrow MA^2 = MH.MO$ (4)

Ta có ΔMAD ∽ ΔMEA (cmt)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MD}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MD.ME$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow$ MH.MO = MD.ME (6)

Xét ΔMHD và ΔMEO có:

$D\hat{M}H$: chung

$\dfrac{MH}{ME} = \dfrac{MD}{MO}$ (do (6))

$\Rightarrow$ ΔMHD ∽ ΔMEO (c.g.c)

$\Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{E}_3$ (7) (2 góc tương ứng)

Xét tứ giác OHDE có: $\hat{H}_1 = \hat{E}_3$ (do (7))

$\Rightarrow$ Tứ giác OHDE nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

Ta có $C\hat{H}D = 90^0 - \hat{H}_1$ (2 góc phụ nhau)

$= 90^0 - \hat{E}_3$ (do (7))

$= \dfrac{180^0 - 2\hat{E}_3}{2}$

$= \dfrac{180^0 - \left(\hat{E}_3 + \hat{D}_1\right)}{2}$ (vì OD = OE = R nên ΔODE cân tại O)

$= \dfrac{D\hat{O}E}{2}$ (tổng 3 góc trong ΔODE)

$= \dfrac{D\hat{H}E}{2}$ (cùng chắn cung DE của tứ giác OHDE nội tiếp)

$\Rightarrow$ HC là phân giác của $D\hat{H}E$

$\Rightarrow \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{HD}{HE}$ (8)

Ta có MH $\perp$ HC tại H

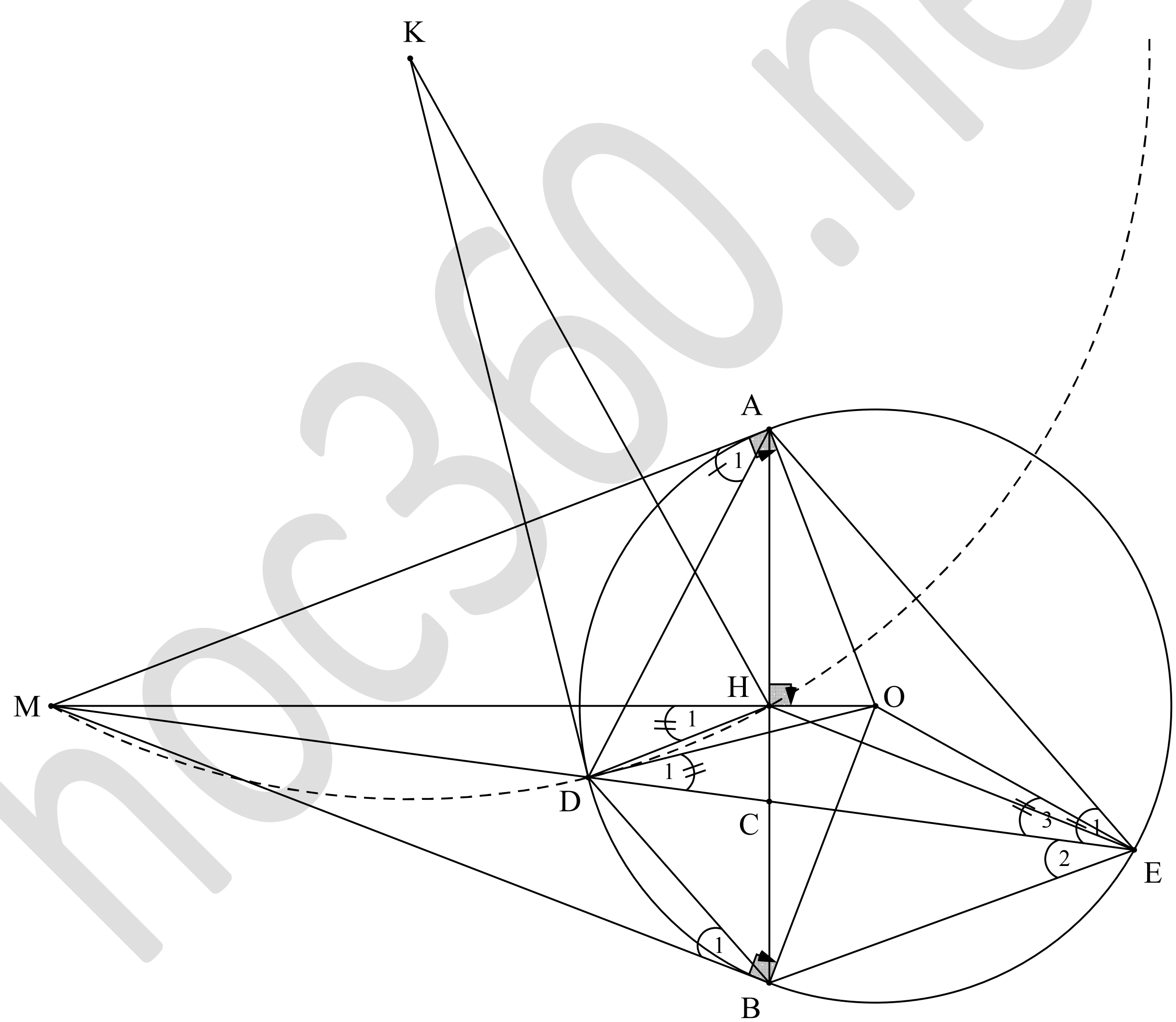
$\Rightarrow$ MH là phân giác ngoài của $D\hat{H}E$

$\Rightarrow \dfrac{MD}{ME} = \dfrac{HD}{HE}$ (9)

Từ (8) và (9) $\Rightarrow \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{MD}{ME} \Leftrightarrow CD.ME = CE.MD$

c) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MHD. Chứng minh KD là tiếp tuyến của (O)

Giải:



Ta có ΔMAO vuông tại A và có AH là đường cao

$\Rightarrow OH.OM = OA^2$ (hệ thức lượng)

$= OE^2$ (10) (vì OA = OE = R)

Xét ΔOEH và ΔOME có:

$E\hat{O}H$: chung

$\dfrac{OH}{OE} = \dfrac{OE}{OM}$ (do (10))

$\Rightarrow \Delta OEH \backsim \Delta OME$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{OEH} = \widehat{OME}$ (11) (2 góc tương ứng)

Ta có $\widehat{KDO} = \widehat{KDH} + \widehat{HDO}$

$= \dfrac{\widehat{KDH} + \widehat{KHD}}{2} + \widehat{HDO}$ (vì KH = KD = bán kính đường tròn (K) nên ΔKDH cân tại K)

$= \dfrac{180^0 - \widehat{DKH}}{2} + \widehat{HDO}$ (tổng 3 góc trong ΔKDH)

$= \dfrac{180^0 - 2\widehat{HMD}}{2} + \widehat{HDO}$ (hệ quả góc nội tiếp)

$= 90^0 - \widehat{OME} + \widehat{HDM}$

$= 90^0 - \widehat{OME} + \widehat{OHE}$ (cùng chắn cung OH của tứ giác OHDE nội tiếp)

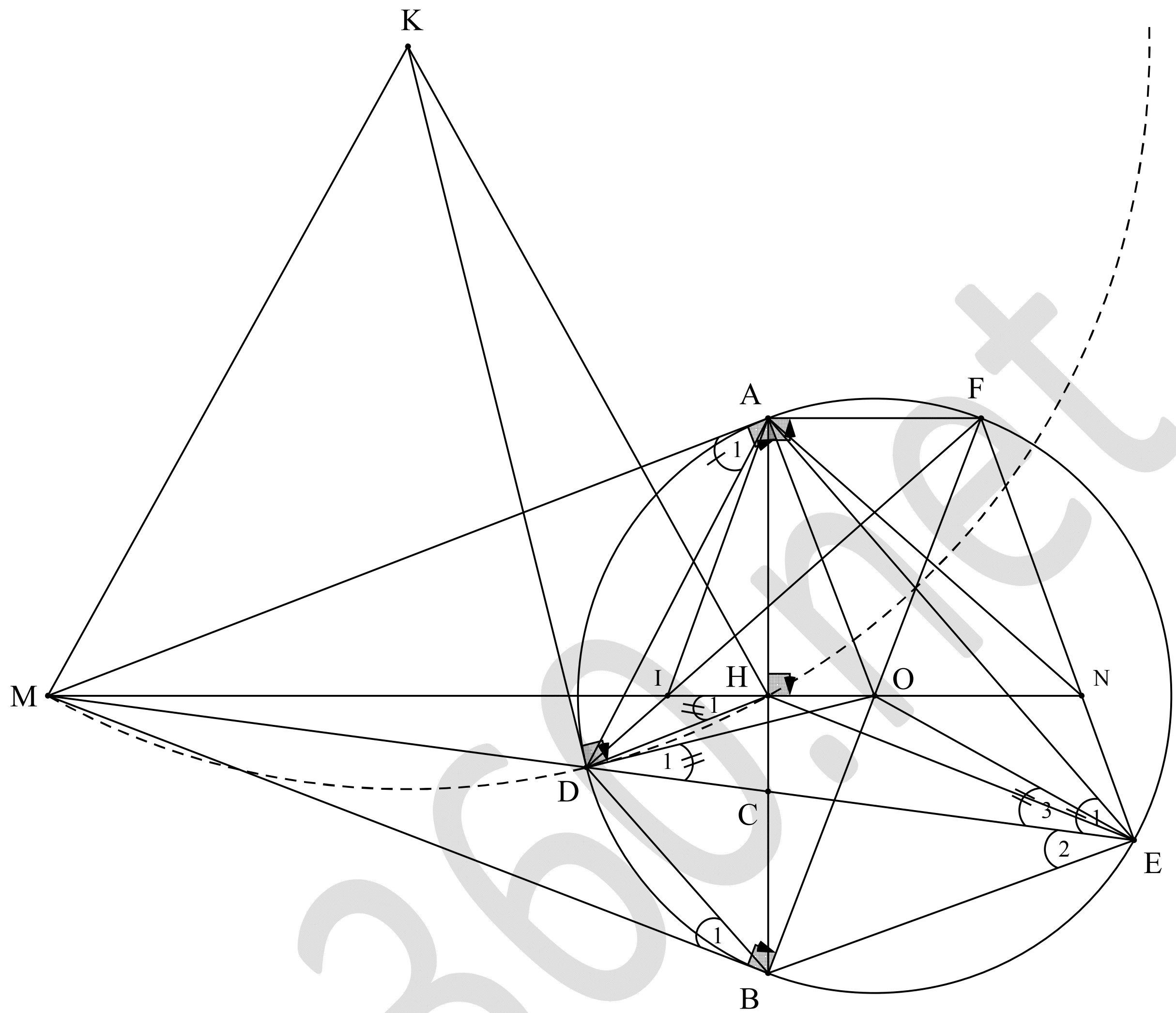
$= 90^0$ (do (11))

$\Rightarrow$ KD $\perp$ DO tại D thuộc (O)

Vậy KD là tiếp tuyến của (O)

d) Vẽ đường kính BF của (O). Đường thẳng MO cắt FD, FE lần lượt tại I và N. Chứng minh O là trung điểm của IN

Giải:



Ta có $\widehat{BAF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Xét tứ giác MAOB có:

$\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow$ Tứ giác MAOB nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

Ta có $\widehat{KDO} = 90^0$ (do trên)

$\Leftrightarrow \widehat{KDA} + \widehat{ADI} + \widehat{FDO} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{ADI} = 90^0 - \widehat{KDA} - \widehat{FDO}$

$= 90^0 - \widehat{AFD} - \widehat{FDO}$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$= 90^0 - \widehat{AFD} - \widehat{DFO}$ (vì OD = OF = R nên ΔODF cân tại O)

$= 90^0 - \left(\widehat{AFD} + \widehat{DFO}\right)$

$= 90^0 - \widehat{AFB}$

$= \widehat{ABF}$ (2 góc phụ nhau)

$= \widehat{AMI}$ (cùng chắn cung AO của tứ giác MAOB nội tiếp)

Xét tứ giác MDIA có: $\widehat{ADI} = \widehat{AMI}$ (do trên)

$\Rightarrow$ Tứ giác MDIA nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh D, M liên tiếp cùng nhìn cạnh AI dưới một góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{ADM}$ (cùng chắn cung AM của tứ giác AMDI nội tiếp)

$= \widehat{AFN}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác ADEF nội tiếp (O))

Xét tứ giác AINF có: $\widehat{AIM} = \widehat{AFN}$ (do trên)

$\Rightarrow$ Tứ giác AINF nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

$\Rightarrow \widehat{ANO} = \widehat{AFI}$ (cùng chắn cung AI của tứ giác AINF nội tiếp)

$= \widehat{FIO}$ (vì AF//IO: cùng vuông góc với AB và 2 góc ở vị trí so le trong)

Ta có $\widehat{AON} = \widehat{AOF} + \widehat{FON}$

$= \widehat{AOF} + \widehat{BOM}$ (2 góc đối đỉnh)

$= \widehat{AOF} + \widehat{AOM}$ (vì MO là phân giác của góc AOB: tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$= \widehat{FOI}$

Xét ΔAON và ΔFOI có:

$\widehat{AON} = \widehat{FOI}$ (do trên)

$\widehat{ANO} = \widehat{FIO}$ (do trên)

$\Rightarrow \Delta AON \backsim \Delta FOI$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{ON}{OI} = \frac{OA}{OF} = 1$ (vì OA = OF = R)

$\Rightarrow ON = OI$

Vậy O là trung điểm của IN