BÀI GIẢI

Câu 1: (2 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) Giải phương trình: $4x^4-4x^2+1=x^2$ (1)

Giải:

$(1)\Leftrightarrow 4x^4-4x^2+1-x^2=0$

$\Leftrightarrow 4x^4-5x^2+1=0$

Đặt $t=x^2$ $(t\geq 0)$

Phương trình (1) trở thành: $4t^2-5t+1=0$ (*)

Ta có $a+b+c=0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm:

$$t_1=1 \text{ (nhận)};\ t_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{4} \text{ (nhận)}$$

+ Với $t_1=1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$

+ Với $t_2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\left\{-1;1;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

b) Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi 140m. Biết 3 lần chiều rộng lớn hơn chiều dài là 10m. Tính chiều dài và chiều rộng miếng đất

Giải:

Gọi x (m), y (m) lần lượt là chiều dài, chiều rộng của miếng đất (x > y > 0)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\begin{cases}2(x+y)=140\\3y-x=10\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=70\\-x+3y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=70\\4y=80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+20=70\\y=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=50\\y=20\end{cases} \text{ (thỏa)}$$

Vậy chiều dài của miếng đất là 50 (m), chiều rộng của miếng đất là 20 (m)

Câu 2: (1,5 điểm)

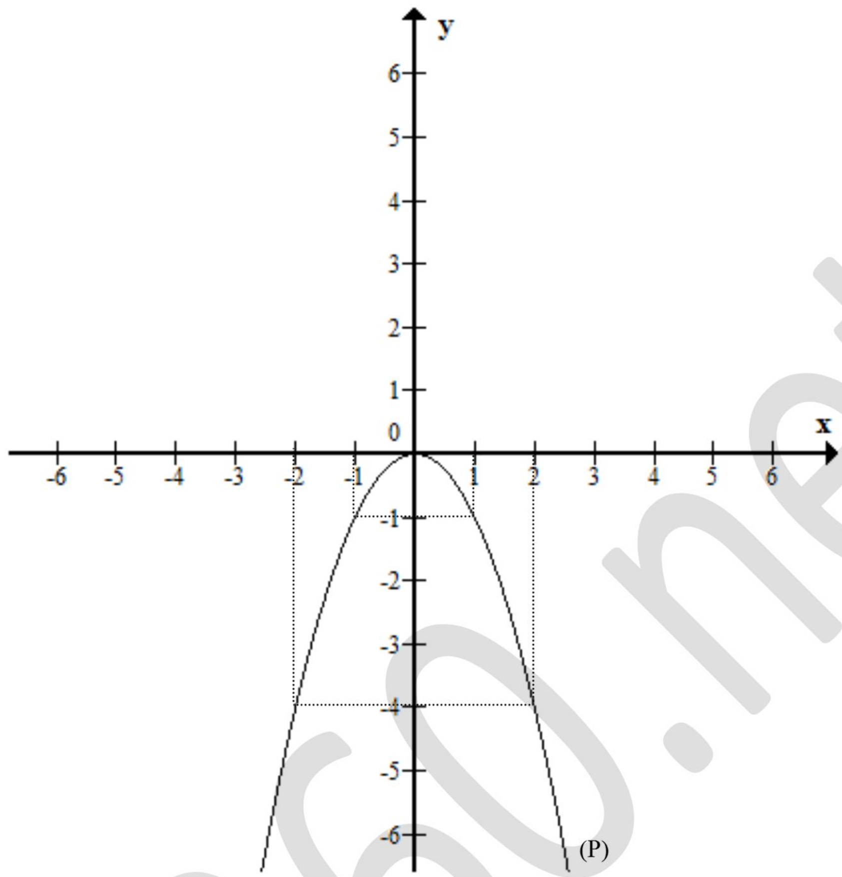
a) Vẽ đồ thị hàm số sau $(P): y=-\frac{1}{4}x^2$

Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y=-\frac{x^2}{4}$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị



b) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với $(D): y = x + 1$ và cắt (P) tại điểm có tung độ là -4

Giải:

Gọi phương trình đường thẳng $(d): y = ax + b \ (a \neq 0)$

Ta có $(d)//(D) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 1 \end{cases} \Rightarrow (d): y = x + b$

Thay $y = -4$ vào (P) ta được: $-4 = -\frac{1}{4}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

$\Rightarrow A(4;-4), B(-4;-4)$ là các điểm thuộc (P) có tung độ là -4

Ta có $A(4;-4) \in (d): y = x + b \Rightarrow -4 = 4 + b \Leftrightarrow b = -8$ (nhận)

Ta có $B(-4;-4) \in (d): y = x + b \Rightarrow -4 = -4 + b \Leftrightarrow b = 0$ (nhận)

Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn là: $(d_1): y = x - 8; (d_2): y = x$

Câu 3: (1,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức sau: $\left(\frac{14}{\sqrt{14}} + \frac{\sqrt{12}+\sqrt{30}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right)\sqrt{5-\sqrt{21}}$

Giải:

Ta có: $\left(\frac{14}{\sqrt{14}} + \frac{\sqrt{12}+\sqrt{30}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right)\sqrt{5-\sqrt{21}} = \left(\sqrt{14} + \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right)\sqrt{5-\sqrt{21}} = (\sqrt{14}+\sqrt{6})\sqrt{5-\sqrt{21}}$

$= (\sqrt{7}+\sqrt{3})\sqrt{2}.\sqrt{5-\sqrt{21}} = (\sqrt{7}+\sqrt{3})\sqrt{10-2\sqrt{21}} = (\sqrt{7}+\sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}$

$= \left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left|\sqrt{7}-\sqrt{3}\right| = \left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$ (vì $\sqrt{7}-\sqrt{3}>0$)

$= 7-3 = 4$

b) Dân số xã A hiện nay có 10 000 người. Người ta dự tính sau 2 năm dân số xã A là 10 404 người. Hỏi trung bình hằng năm dân số xã A tăng bao nhiêu phần trăm?

Giải:

Gọi x% là dân số xã A tăng trung bình hằng năm (x > 0)

Số dân sau 2 năm của xã A là: $10000.(1+x\%)^2$ (người)

Theo đề bài, ta có phương trình: $10000.(1+x\%)^2 = 10404$

$\Leftrightarrow (1+x\%)^2 = 1{,}0404 \Leftrightarrow 1+x\% = \sqrt{1{,}0404} = 1{,}02 \Leftrightarrow x\% = 0{,}02 = 2\%$ (nhận)

Vậy dân số xã A tăng trung bình hằng năm là 2%

Câu 4: (1,5 điểm) Cho phương trình $x^2-2mx+2m-1=0$

a) Chứng minh phương trình trên luôn có nghiệm x_1, x_2 với mọi m

Giải:

Ta có $\Delta' = (-m)^2 - 1.(2m-1) = m^2-2m+1 = (m-1)^2 \geq 0, \forall m$

Do $\Delta' \geq 0, \forall m$ nên phương trình luôn có nghiệm x_1, x_2 với mọi m

b) Đặt $A = 2\left(x_1^2+x_2^2\right) - 5x_1x_2$. Tìm m sao cho A = 27

Giải:

Theo câu a, phương trình luôn có nghiệm x_1, x_2 với mọi m thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-2m}{1} = 2m \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2m-1}{1} = 2m-1 \end{cases}$$

Ta có A = 27 $\Leftrightarrow 2\left(x_1^2+x_2^2\right) - 5x_1x_2 = 27$

$\Leftrightarrow 2\left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right] - 5x_1x_2 - 27 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x_1+x_2)^2 - 9x_1x_2 - 27 = 0$

$\Leftrightarrow 2(2m)^2 - 9(2m-1) - 27 = 0$

$\Leftrightarrow 8m^2 - 18m - 18 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m - 9 = 0 \ (5)$

Ta có $\Delta = (-9)^2 - 4.4.(-9) = 81+144 = 225 > 0; \sqrt{\Delta} = \sqrt{225} = 15$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (5) có 2 nghiệm phân biệt:

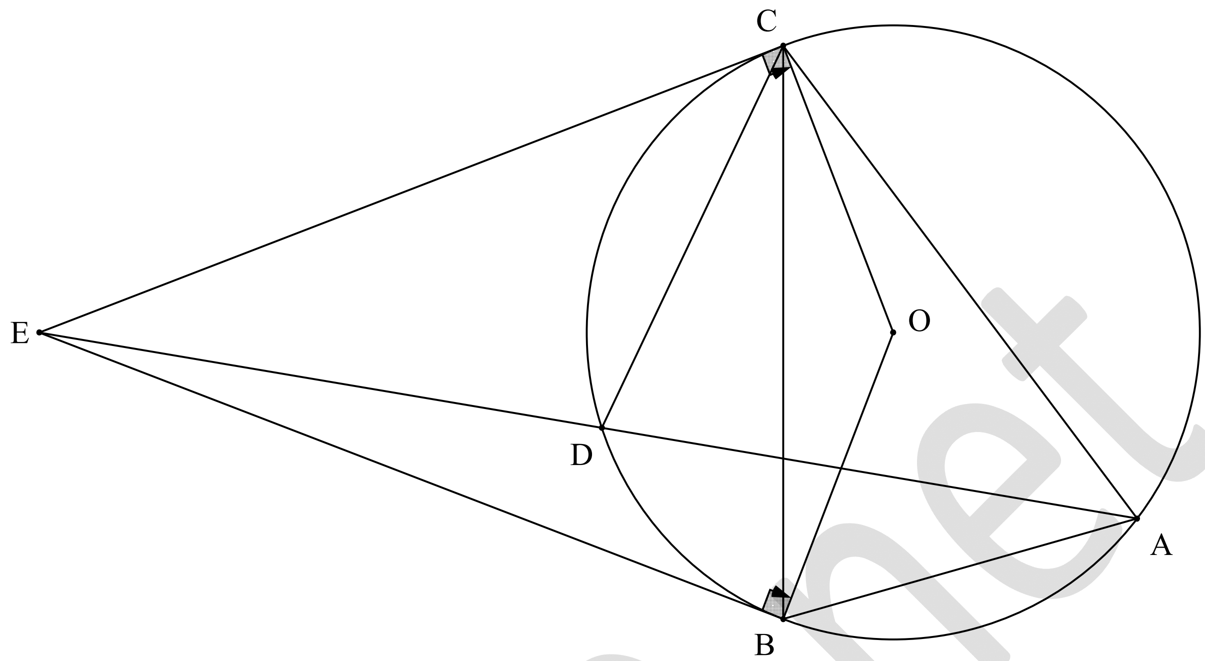
$$m_1 = \frac{9+15}{2.4} = 3; m_2 = \frac{9-15}{2.4} = \frac{-3}{4}$$

Vậy $m_1 = 3; m_2 = \dfrac{-3}{4}$ là các giá trị cần tìm

Câu 5: (3,5 điểm) Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại E, AE cắt đường tròn (O) tại D (khác điểm A)

a) Chứng minh tứ giác OBEC nội tiếp

Giải:



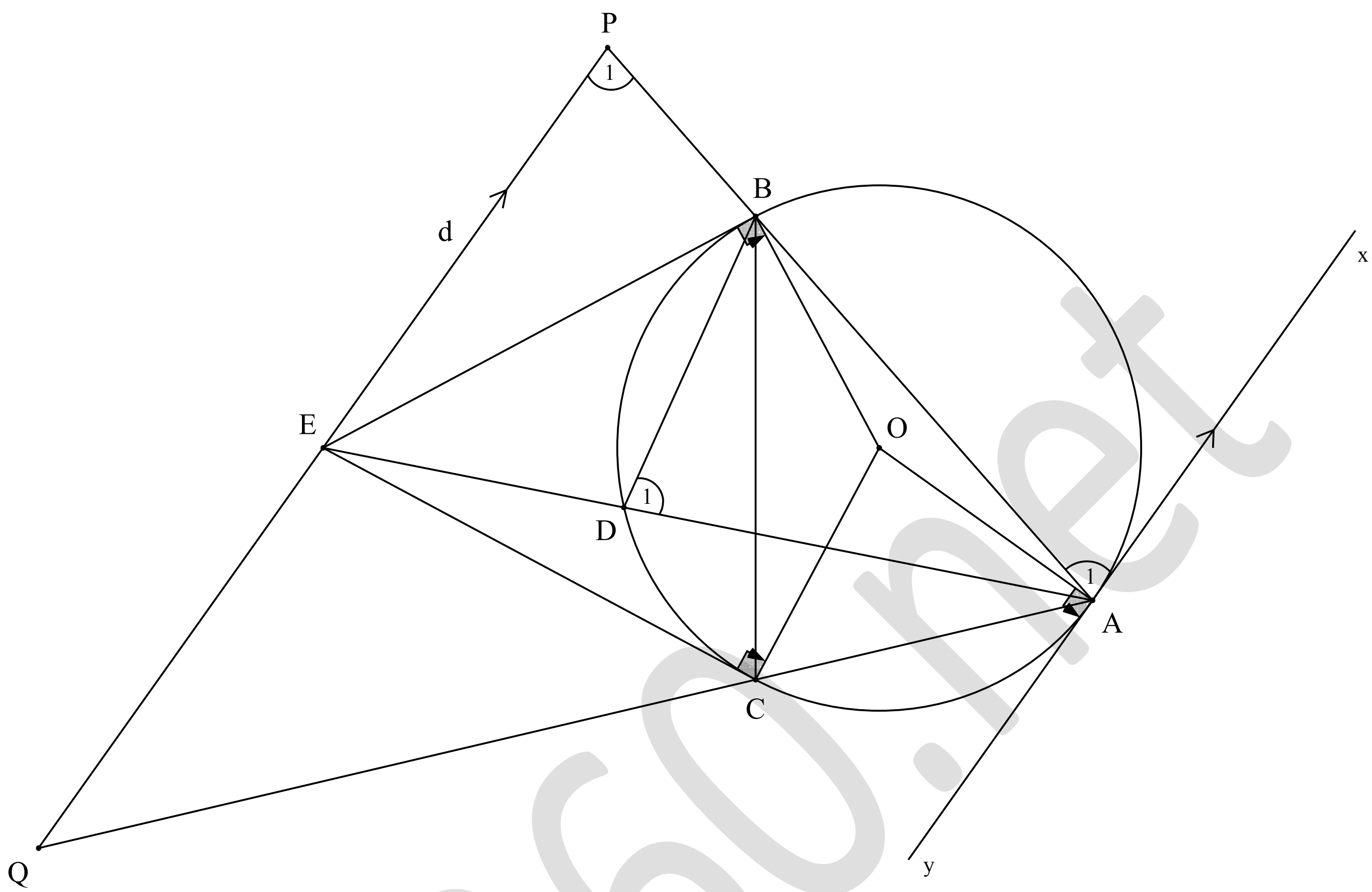
Xét tứ giác OBEC có:

$\widehat{EBO} + \widehat{ECO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow$ Tứ giác OBEC nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

b) Từ E kẻ đường thẳng d song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O), d cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh AB.AP = AD.AE

Giải:



Gọi xy là tiếp tuyến của (O) tại A

Ta có $\hat{D}_1 = \hat{A}_1$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$= \hat{P}_1$ (1) (vì EP//xy và 2 góc ở vị trí so le trong)

Xét ΔADB và ΔAPE có:

$\widehat{BAD}$: chung

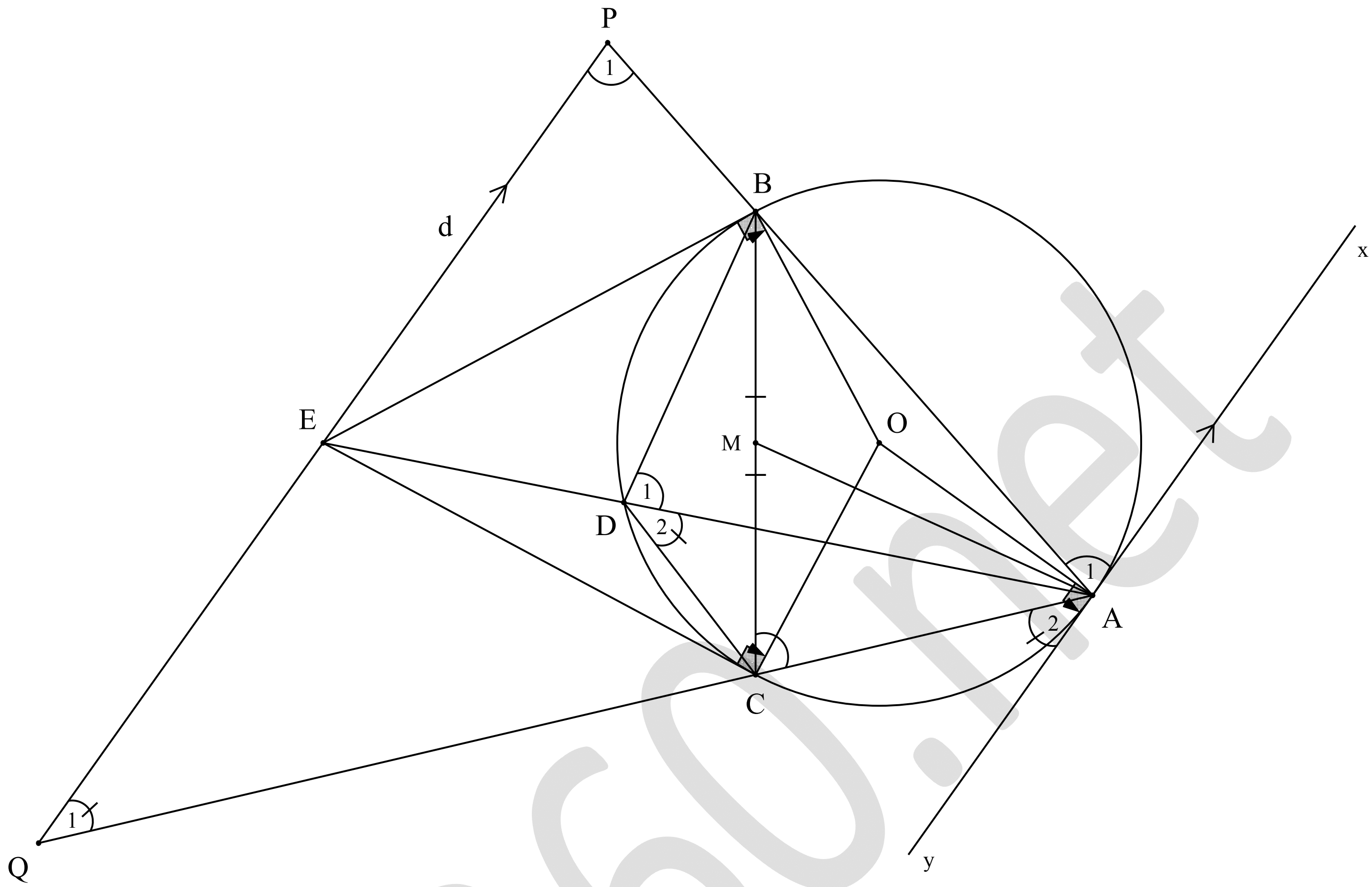
$\hat{D}_1 = \hat{P}_1$ (do (1))

$\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta APE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AP} \Leftrightarrow AB.AP = AD.AE$

c) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh EP = EQ và góc PAE = góc MAC

Giải:



Ta có $\Delta ADB \backsim \Delta APE$ (do trên)

$\Rightarrow \dfrac{DB}{PE} = \dfrac{AB}{AE} \Leftrightarrow PE = EA.\dfrac{DB}{AB}$ (2)

Ta có $\hat{D}_2 = \hat{A}_2$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$= \hat{Q}_1$ (3) (vì EQ//xy và 2 góc ở vị trí so le trong)

Xét ΔADC và ΔAQE có:

$\widehat{DAC}$: chung

$\hat{D}_2 = \hat{Q}_1$ (do (3))

$\Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta AQE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DC}{QE} = \dfrac{AC}{AE} \Leftrightarrow QE = EA.\dfrac{DC}{AC}$ (4)

Xét ΔEBD và ΔEAB có:

$\widehat{BED}$: chung

$\widehat{EBD} = \widehat{EAB}$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta EBD \backsim \Delta EAB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{BD}{AB} \Rightarrow EB = EA.\dfrac{BD}{AB}$ (5)

Xét ΔECD và ΔEAC có:

$\widehat{CED}$: chung

$\widehat{ECD} = \widehat{EAC}$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta ECD \backsim \Delta EAC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EC}{EA} = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow EC = EA.\dfrac{CD}{AC}$ (6)

Ta có EB = EC (7) (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Từ (2), (4), (5), (6) và (7) $\Rightarrow$ PE = QE (*)

$\Rightarrow$ E là trung điểm của PQ

Ta có $\hat{P}_1 = \hat{D}_1$ (do (1))

$= B\hat{C}A$ (8) (cùng chắn cung AB)

Xét ΔACB và ΔAPQ có:

$B\hat{A}C$: chung

$B\hat{C}A = \hat{P}_1$ (do (8))

$\Rightarrow$ ΔACB ∽ ΔAPQ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{BC}{PQ} \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{2MC}{2EP} = \dfrac{MC}{EP}$ (9) (vì M là trung điểm BC, E là trung điểm của PQ)

Xét ΔCMA và ΔPEA có:

$M\hat{C}A = \hat{P}_1$ (do trên)

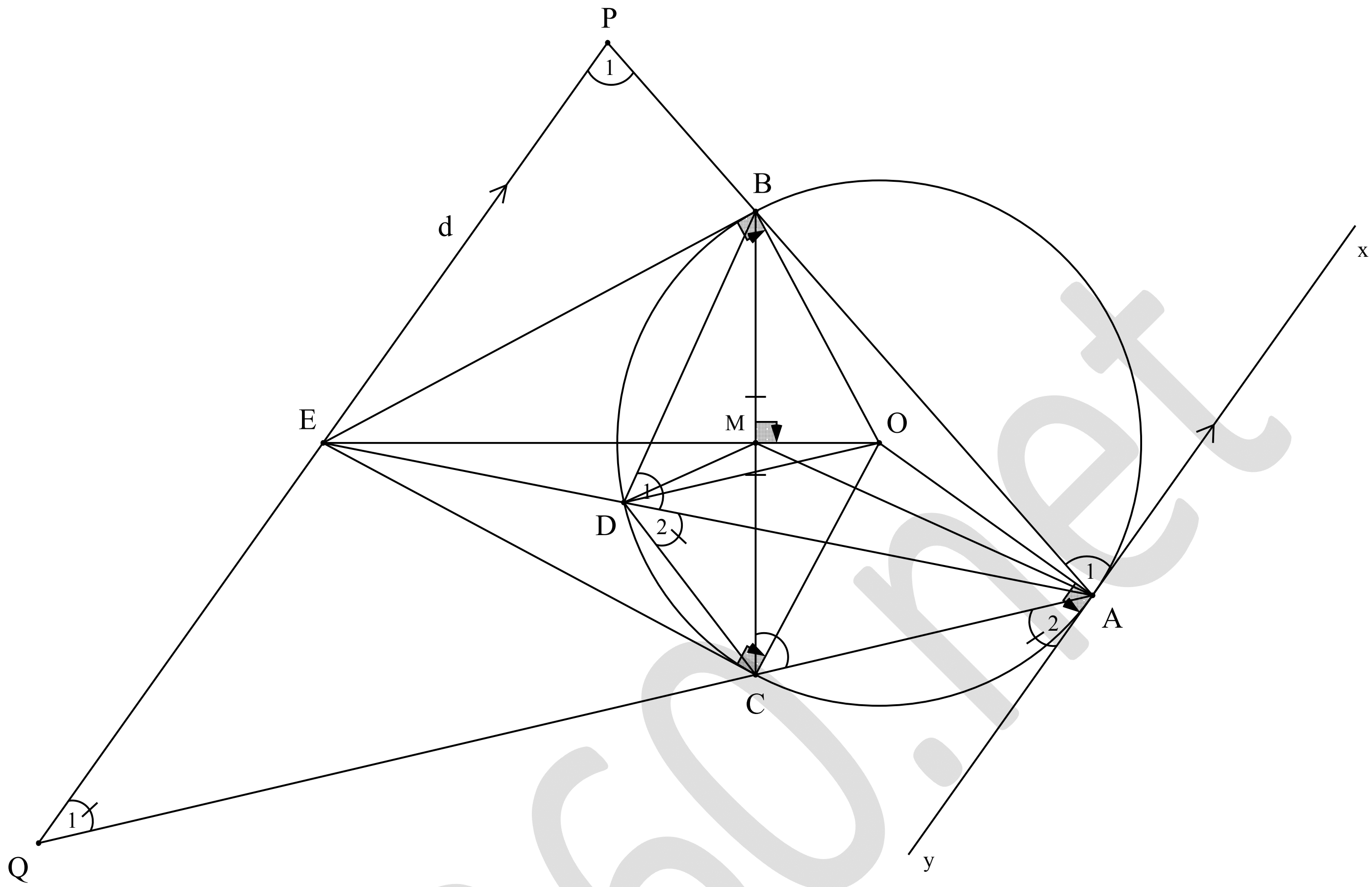
$\dfrac{AC}{AP} = \dfrac{MC}{EP}$ (do (9))

$\Rightarrow$ ΔCMA ∽ ΔPEA (c.g.c)

$\Rightarrow M\hat{A}C = E\hat{A}P$ (2 góc tương ứng)

d) Chứng minh rằng: $AM.MD = \dfrac{BC^2}{4}$

Giải:



Ta có EB = EC (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

OB = OC = R

$\Rightarrow$ EO là đường trung trực của đoạn thẳng BC

$\Rightarrow$ EO $\perp$ BC tại trung điểm M của BC

Ta có ΔEBO vuông tại B và có BM là đường cao

$\Rightarrow EB^2 = EM.EO$ (10) (hệ thức lượng)

Ta có $\Delta EBD \backsim \Delta EAB$ (do trên)

$\Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{ED}{EB} \Leftrightarrow EB^2 = ED.EA$ (11)

Từ (10) và (11) $\Rightarrow$ EM.EO = ED.EA (12)

Xét ΔEMD và ΔEAO có:

$\widehat{MED}$: chung

$\dfrac{EM}{EA} = \dfrac{ED}{EO}$ (do 12)

$\Rightarrow \Delta EMD \backsim \Delta EAO$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{EMD} = \widehat{EAO}$ (13) (2 góc tương ứng)

Xét tứ giác DMOA có: $\widehat{EMD} = \widehat{EAO}$ (do (13))

$\Rightarrow$ Tứ giác DMOA nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

$\Rightarrow \widehat{DMA} = \widehat{DOA}$ (cùng chắn cung AD của tứ giác DMOA nội tiếp)

$= 2\widehat{DBA}$ (hệ quả góc nội tiếp)

$= 2.\widehat{AEP}$ (vì $\Delta ADB \backsim \Delta APE$ và 2 góc ở vị trí tương ứng)

$= 2.\widehat{AMC}$ (vì $\Delta CMA \backsim \Delta PEA$ và 2 góc ở vị trí tương ứng)

$\Rightarrow$ MC là phân giác của $\widehat{DMA}$

Ta có $\widehat{MAC} = \widehat{EAP}$ (vì $\Delta CMA \backsim \Delta PEA$ và 2 góc ở vị trí tương ứng)

$= \widehat{DCM}$ (14) (cùng chắn cung BD)

Xét ΔMCD và ΔMAC có:

$\widehat{CMD} = \widehat{AMC}$ (vì MC là phân giác của $\widehat{DMA}$)

$\widehat{DCM} = \widehat{MAC}$ (do (14))

$\Rightarrow \Delta MCD \backsim \Delta MAC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MC} = \dfrac{MC}{MA} \Leftrightarrow AM.MD = MC^2 = \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 = \dfrac{BC^2}{4}$ (vì M là trung điểm của BC)