

BÀI GIẢI

Câu 1: (2 điểm)

a) Giải phương trình: $5x(x-1) = 3x^2 - 2$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow 5x^2 - 5x - 3x^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4.2.2 = 25 - 16 = 9 > 0; \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình có nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{5+3}{2.2} = 2; x_2 = \frac{5-3}{2.2} = \frac{1}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S = \left\{ 2; \frac{1}{2} \right\}$

b) Tính diện tích của một hình chữ nhật, biết chu vi là 60m và chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài

Giải:

Gọi x, y (m) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật ($y > x > 0$)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x+y) = 60 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=60 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=120 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=120 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \\ 72-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \\ y=36 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy diện tích của hình chữ nhật là: $x.y = 24.36 = 864 \text{ (m}^2\text{)}$

Câu 2: (1,5 điểm)

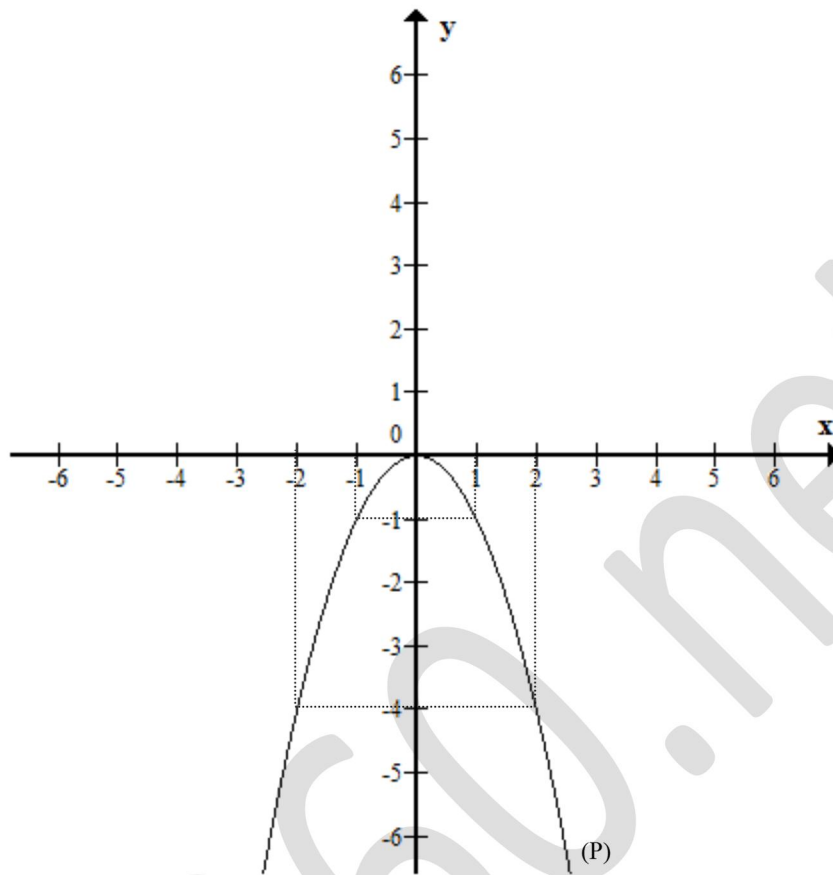
a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -\frac{x^2}{4}$

Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{x^2}{4}$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị



b) Cho (D): $y = (2m - 1)x + 5$. Tìm m để (D) cắt (P) tại điểm có hoành độ là 3

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) có dạng: $-\frac{x^2}{4} = (2m - 1)x + 5$ (*)

Do (D) cắt (P) tại điểm có hoành độ là 3 nên $x = 3$ là nghiệm của phương trình (*)

$$\Rightarrow -\frac{3^2}{4} = (2m - 1) \cdot 3 + 5 \Leftrightarrow -\frac{9}{4} = 6m - 3 + 5 \Leftrightarrow 6m = -\frac{17}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{17}{24}$$

Câu 3: (1,5 điểm)

a) Rút gọn: $A = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(3\sqrt{3}-4)(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+4)(5+2\sqrt{3})}{(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})}} \\ &= \sqrt{\frac{18-3\sqrt{3}-8\sqrt{3}+4}{12-1}} - \sqrt{\frac{5\sqrt{3}+6+20+8\sqrt{3}}{25-12}} = \sqrt{\frac{22-11\sqrt{3}}{11}} - \sqrt{\frac{13\sqrt{3}+26}{13}} \\ &= \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{3}-1| - |\sqrt{3}+1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1 - (\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \quad (\text{vì } \sqrt{3}-1 > 0; \sqrt{3}+1 > 0)$$

b) Để khuyến khích tiết kiệm điện, giá điện sinh hoạt tính theo kiểu lũy biến, nghĩa là nếu người sử dụng càng nhiều điện thì giá mỗi số điện (1kWh) càng tăng lên theo các mức sau:

Mức thứ nhất: tính cho 100 số điện đầu tiên

Mức thứ hai: tính số số điện thứ 101 đến 150, mỗi số đắt hơn 100 đồng so với mức thứ nhất

Mức thứ ba: tính cho số điện thứ 151 đến 200, mỗi số đắt hơn 150 đồng so với mức thứ hai

...

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng (thuế VAT).

Tháng vừa qua, nhà Hùng dùng hết 182 số điện và phải trả 314600 đồng. Hỏi mỗi số điện ở mức thứ nhất giá bao nhiêu?

Giải:

Gọi x là giá 1 số điện (kWh) ở mức thứ nhất (tính bằng đồng) ($x > 0$)

Vì nhà Hùng dùng hết $182 = 100 + 50 + 32$ số điện nên phải trả tiền ở 3 mức:

Giá tiền 100 số điện đầu tiên là $100x$ (đồng)

Giá tiền 50 số điện tiếp theo là $50(x+100)$ (đồng)

Giá tiền 32 số điện tiếp theo là $32(x+100+150) = 32(x+250)$ (đồng)

Kể cả thuế VAT, ta có phương trình $[100x + 50(x+100) + 32(x+250)] \frac{110}{100} = 314600$

Giải phương trình ta được $x = 1500$ (nhận)

Vậy giá tiền 1 số điện ở mức thứ nhất là 1500 đồng

Câu 4: (1,5 điểm) Cho phương trình: $2x^2 - (2m-1)x - m - 1 = 0$

a) Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \Delta &= [-(2m-1)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m-1) = 4m^2 - 4m + 1 + 8m + 8 = 4m^2 + 4m + 1 + 8 = (2m+1)^2 + 8 \\ &\geq 8 > 0, \forall m \quad (\text{vì } (2m+1)^2 \geq 0, \forall m) \end{aligned}$$

Do $\Delta \geq 0, \forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

b) Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Tìm m để biểu thức $A = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - (x_1 - x_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Giải:

Theo câu a, với mọi m phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-(2m-1)}{2} = \frac{2m-1}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - (x_1 - x_2)^2 \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2 - (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 \\ &= \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 - \frac{-m-1}{2} \quad (\text{do hệ thức Vi-ét}) \\ &= \frac{4m^2 - 4m + 1}{4} + \frac{2m+2}{4} = \frac{4m^2 - 2m + 3}{4} = m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$= \left(m^2 - 2m \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) - \frac{1}{16} + \frac{3}{4} = \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{11}{16} \geq \frac{11}{16}, \forall m \quad (\text{vì } \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \geq 0, \forall m)$$

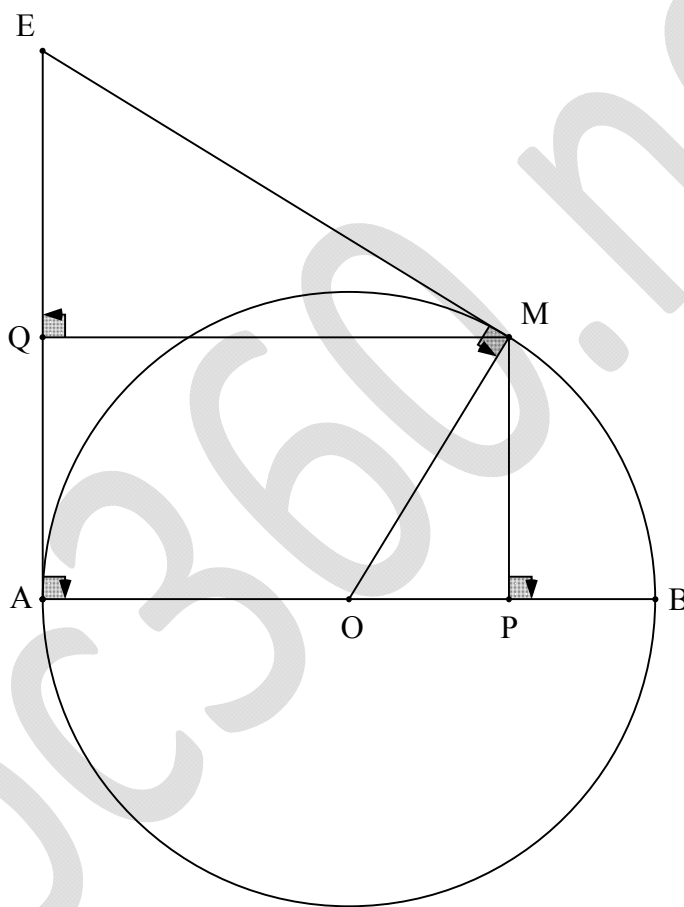
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là: $\text{Min}A = \frac{1}{4}$ khi và chỉ khi $m = \frac{1}{4}$

Câu 5: (3,5 điểm) Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Gọi $M \in (O)$ (M khác A và B). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và M cắt nhau tại E. Vẽ $MP \perp AB$ ($P \in AB$), $MQ \perp AE$ ($Q \in AE$)

a) Chứng minh tứ giác AEMO nội tiếp và tứ giác APMQ là hình chữ nhật

Giải:



Xét tứ giác AEMO có:

$$\widehat{EAO} + \widehat{EMO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \quad (\text{tính chất tiếp tuyến})$$

\Rightarrow Tứ giác AEMO nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180°)

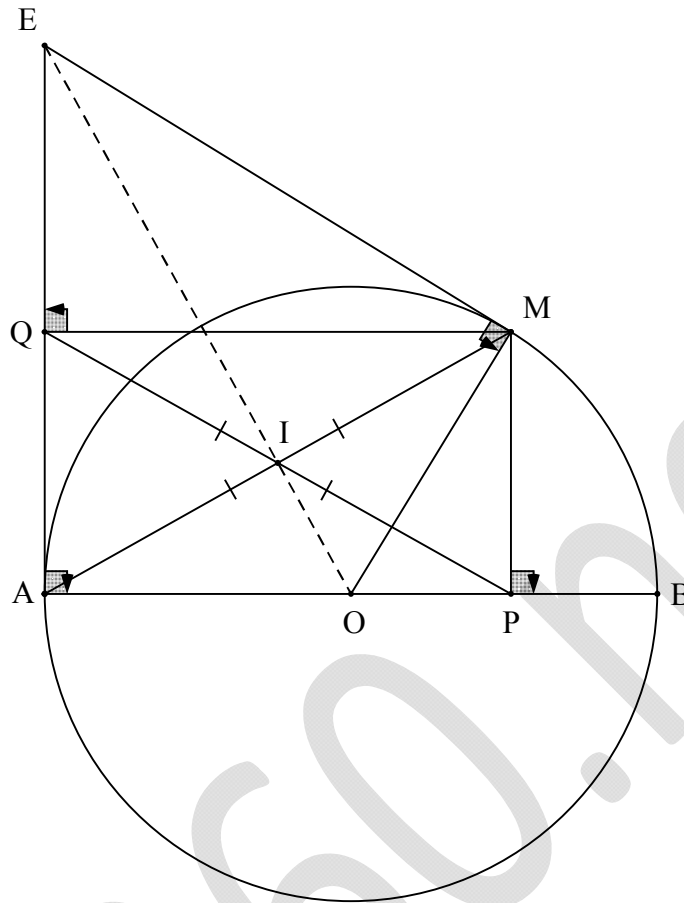
Xét tứ giác APMQ có:

$$\widehat{QAP} = \widehat{AQM} = \widehat{APM} = 90^\circ \quad (\text{vì } QM \perp AE, EA \perp AB, MP \perp AB)$$

\Rightarrow Tứ giác APMQ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật)

b) Gọi I là trung điểm PQ. Chứng minh O, I, E thẳng hàng

Giải:



Ta có $APMQ$ là hình chữ nhật

Mà I là trung điểm của PQ nên I cũng là trung điểm của AM

Ta có $EA = EM$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$$OA = OM = R$$

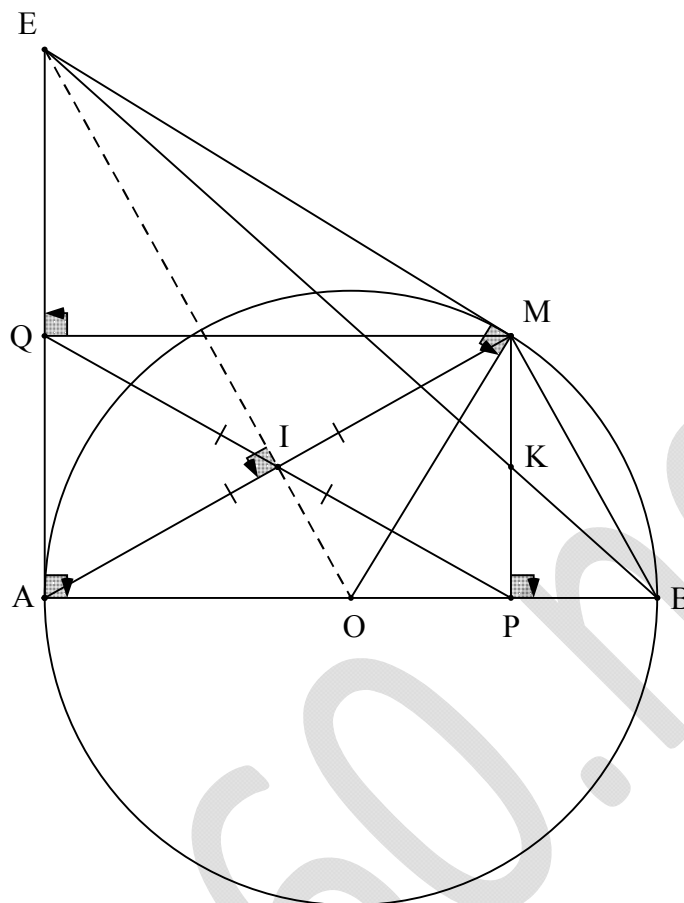
$\Rightarrow EO$ là đường trung trực của AM

$\Rightarrow EO \perp AM$ tại trung điểm I của AM

$\Rightarrow 3$ điểm O, I, E thẳng hàng

- c) Gọi K là giao điểm của EB và MP . Chứng minh $\triangle AEO$ và $\triangle MPB$ đồng dạng. Từ đó suy ra K là trung điểm của MP

Giải:



Xét $\triangle EAO$ và $\triangle MPB$ có:

$$\widehat{EAO} = \widehat{MPB} = 90^\circ \text{ (vì } EA \perp AB, MP \perp AB)$$

$$\widehat{EOA} = \widehat{MBP} \text{ (vì } EO \parallel MB: \text{ cùng vuông góc } AM \text{ và 2 góc ở vị trí đồng vị)}$$

$\Rightarrow \triangle EAO \sim \triangle MPB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EA}{MP} = \frac{AO}{PB} \Rightarrow MP = \frac{EA \cdot PB}{AO} \quad (1)$$

Ta có $KP \parallel EA$ (cùng vuông góc AB)

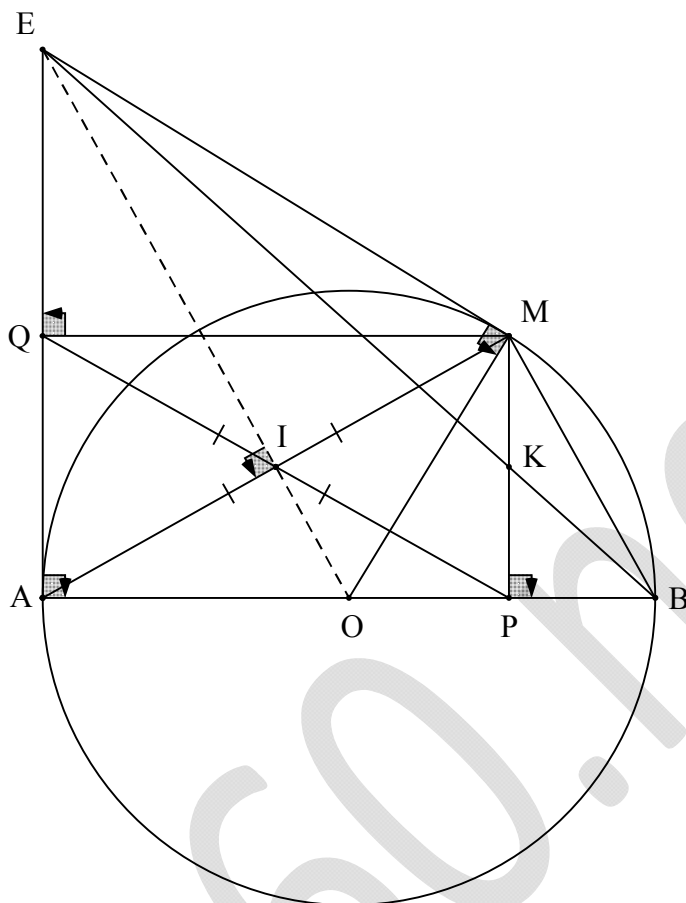
$$\Rightarrow \frac{KP}{EA} = \frac{PB}{BA} \Leftrightarrow KP = \frac{PB \cdot EA}{BA} = \frac{PB \cdot EA}{2 \cdot AO} = \frac{1}{2} \frac{EA \cdot PB}{AO} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow MP = \frac{1}{2} KP$$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của MP

d) Đặt $AP = x$. Tính MP theo R và x . Tìm vị trí M trên đường tròn (O) để hình chữ nhật $APMQ$ có diện tích lớn nhất

Giải:



Ta có $BP = AD - AP = 2R - x$

$$\Rightarrow MP = \sqrt{AP \cdot PB} = \sqrt{x(2R - x)} = \sqrt{3x} \cdot \sqrt{\frac{x}{3}(2R - x)}$$

$$\leq \sqrt{3x} \left(\frac{\frac{x}{2} + 2R - x}{2} \right) = \sqrt{3x} \left(R - \frac{x}{3} \right) = 3\sqrt{3} \frac{x}{3} \left(R - \frac{x}{3} \right) \leq 3\sqrt{3} \left(\frac{\frac{x}{3} + R - \frac{x}{3}}{2} \right)^2 = 3\sqrt{3} \cdot \frac{R^2}{4}$$

$$\text{SMPAQ lớn nhất khi } \begin{cases} \frac{x}{3} = 2R - x \\ \frac{x}{3} = R - \frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 2R - x = R - \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = R \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}R \Leftrightarrow AP = \frac{3}{2}R$$

$\Leftrightarrow P$ là trung điểm của OB

$$\text{Ta có } \cos \hat{M}OB = \frac{OP}{OM} = \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{M}OB = 60^\circ$$

Xét $\triangle OBM$ có: $OB = OM = R$ và có $\hat{M}OB = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle OBM$ đều

Vậy lấy điểm M thuộc cung AB sao cho $BM = R$