BÀI GIẢI

Câu 1: (2 điểm) Giải phương trình và giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

a) $(3x-1)(x+1)=15$ (1)

Giải:

$(1)\Leftrightarrow 3x^2+3x-x-1-15=0$

$\Leftrightarrow 3x^2+2x-16=0$

Ta có $\Delta'=1^2-3.(-16)=1+48=49>0;\sqrt{\Delta'}=\sqrt{49}=7$

Do $\Delta'>0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-1+7}{3}=2;x_2=\frac{-1-7}{3}=-\frac{8}{3}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\left\{2;-\frac{8}{3}\right\}$

b) Nếu giảm chiều rộng của một mảnh vườn hình chữ nhật đi 3m và tăng chiều dài 8m thì diện tích giảm đi $54m^2$. Nếu tăng chiều rộng thêm 2m và giảm chiều dài đi 4m thì diện tích tăng thêm $32m^2$. Hãy tính kích thước của mảnh vườn

Giải:

Gọi x, y (m) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật (y > x > 0)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x-3)(y+8)=xy-54\\(x+2)(y-4)=xy+32\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy+8x-3y-24=xy-54\\xy-4x+2y-8=xy+32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x-3y=-30\\-4x+2y=40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x-3y=-30\\-8x+4y=80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x-150=-30\\y=50\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=15\\y=50\end{cases}\text{ (nhận)}$$

Vậy mảnh vườn hình chữ nhật có chiều rộng 15m và chiều dài 50m

Câu 2: (1,5 điểm)

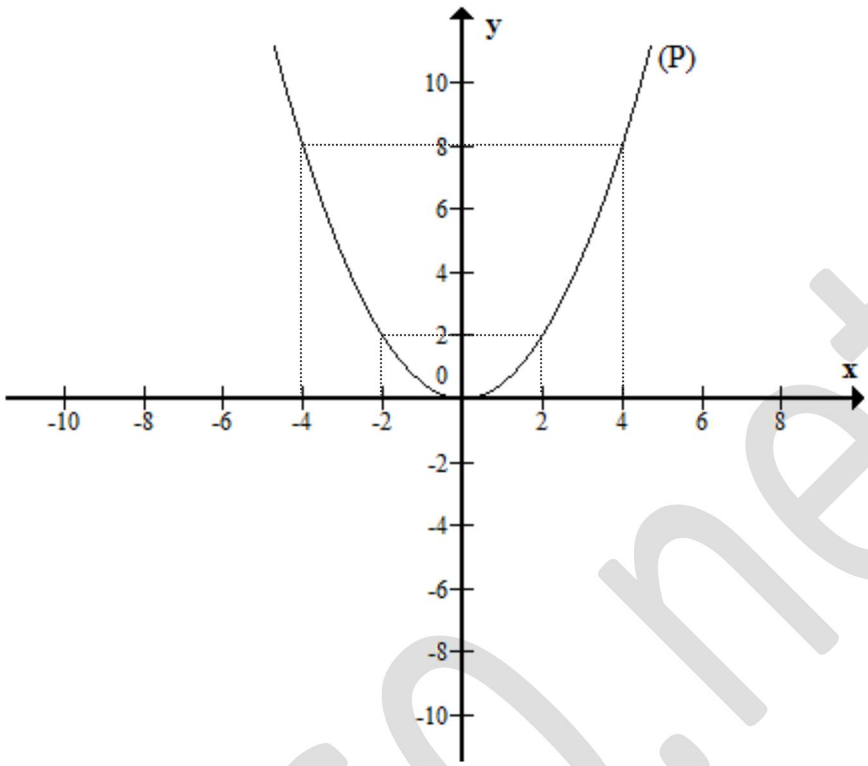
a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$

Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y=\frac{x^2}{2}$	8	2	0	2	8

Đồ thị



b) Tìm tọa độ điểm A thuộc (P) biết điểm A có hoành độ bằng 2. Viết phương trình đường thẳng OA

Giải:

Gọi $A(x_0;y_0)$ là điểm cần tìm

Ta có A có hoành độ bằng 2 nên $x_0=2\Rightarrow A(2;y_0)$

Mà $A(2;y_0)\in(P):y=\frac{1}{2}x^2\Rightarrow y_0=\frac{1}{2}.2^2=2\Rightarrow A(2;2)$

Gọi phương trình đường thẳng OA là: $y=ax+b(a\neq 0)$

Ta có O, A thuộc OA nên có hệ phương trình: $\begin{cases}0.a+b=0\\2a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\2a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\a=1\end{cases}$ (thỏa)

Vậy phương trình đường thẳng OA là: y = x

Câu 3: (1,5 điểm)

a) Thu gọn biểu thức sau: $A=\frac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}-\frac{\sqrt{6-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}-\sqrt{3-\sqrt{3}}}$

Giải:

Ta có: $A=\frac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}-\frac{\sqrt{6-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}-\sqrt{3-\sqrt{3}}}$

Đặt $T=\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}$ $(T>0)$

$\Leftrightarrow T^2=5+\sqrt{3}+2\sqrt{5+\sqrt{3}}\sqrt{5-\sqrt{3}}+5-\sqrt{3}=10+2\sqrt{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})}=10+2\sqrt{25-3}=10+2\sqrt{22}$

$\Leftrightarrow T=\sqrt{10+2\sqrt{22}}=\sqrt{2(5+\sqrt{22})}=\sqrt{2}.\sqrt{5+\sqrt{22}}$

Đặt $M=\sqrt{3+\sqrt{3}}-\sqrt{3-\sqrt{3}}$ $(M>0)$

$\Leftrightarrow M^2 = 3+\sqrt{3} - 2\sqrt{3+\sqrt{3}}\sqrt{3-\sqrt{3}} + 3 - \sqrt{3} = 6 - 2\sqrt{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = 6 - 2\sqrt{9-3} = 6 - 2\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow M = \sqrt{6-2\sqrt{6}}$

Vậy $A = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{5+\sqrt{22}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}} - \dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{6}}}{\sqrt{6-2\sqrt{6}}} = \sqrt{2} - 1$

b) Cho bảng số liệu được thu thập số thóc từ những cánh đồng trồng lúa (tấn) như sau:

7	6	7	6	7	3	5	6	6
4	6	3	4	6	5	3	8	4
4	7	8	10	5	7	7	7	4
7	7	7	7	4	9	6	6	6
6	6	6	9	7	6	8	8	6

Hãy cho biết có bao nhiêu cánh đồng được thu thập? Có bao nhiêu cánh đồng thu hoạch được số thóc nhiều nhất? Có bao nhiêu cánh đồng thu hoạch ít thóc nhất?

Giải:

Giá trị (x)	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	3	6	3	14	12	4	2	1	N =45

Dựa vào bảng tần số ta thấy:
Có 45 cánh đồng được thu thập
Có 1 cánh đồng được thu thập thóc nhiều nhất
Có 3 cánh đồng được thu thập thóc ít nhất

Câu 4: (1,5 điểm) Cho phương trình: $x^2 - 2x - 2m + 1 = 0$ (*) (x là ẩn số, m là tham số)

a) Định m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Giải:

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - 1.(-2m+1) = 1 + 2m - 1 = 2m$

Để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Vậy m > 0 thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

b) Định m để biểu thức $A = x_1^3x_2 + x_1x_2^3$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó

Giải:

Theo câu a, với m > 0 thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-2}{1} = 2 \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-2m+1}{1} = 1-2m \end{cases}$$

Ta có $A = x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) = x_1x_2\left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right]$

$= (1-2m)\left[2^2 - 2(1-2m)\right] = (1-2m)(4-2+4m) = (1-2m)(2+4m) = 2(1-2m)(1+2m)$

$= 2(1-4m^2) = 2 - 8m^2 \le 2$ (vì $-8m^2 \le 0$)

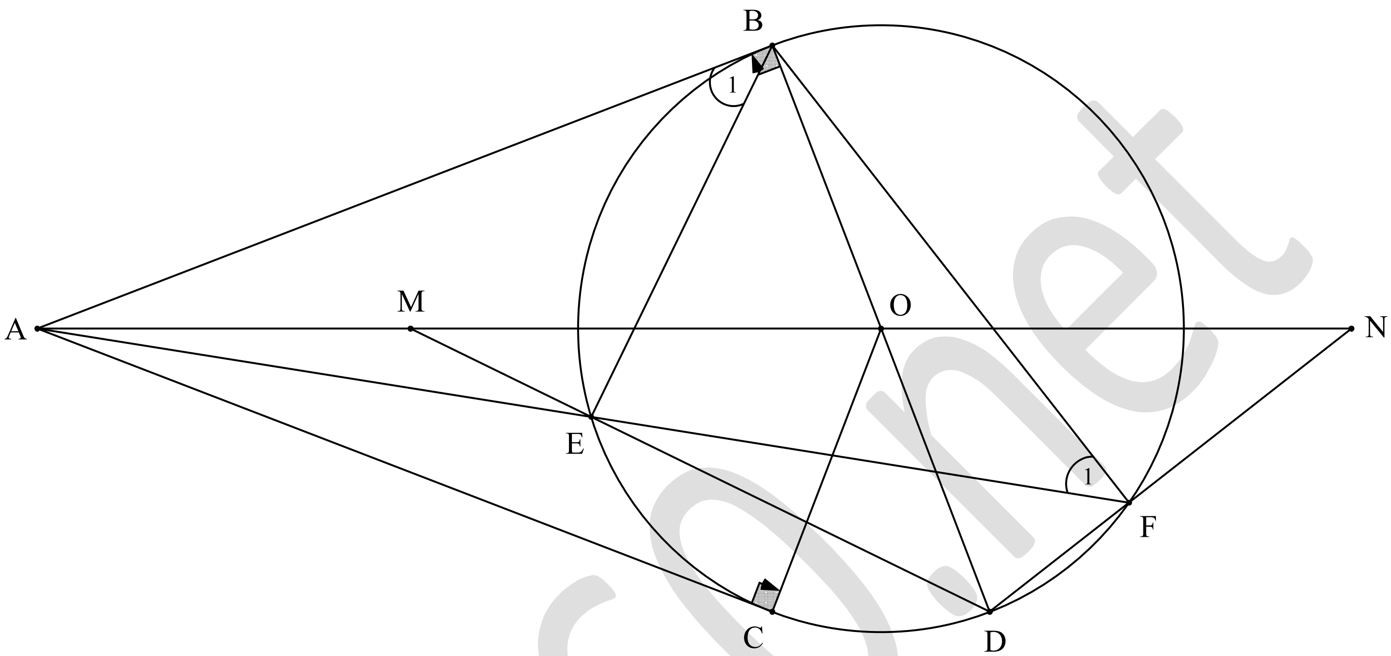
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = 0$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là MaxA = 2 khi và chỉ khi m = 0

Câu 5: (3,5 điểm) Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là 2 tiếp điểm) và cát tuyến AEF (E nằm giữa A và F, EF không qua O). Gọi D là điểm đối xứng của B qua O. Các tia DE, DF cắt AO theo thứ tự tại M và N

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp và $AC^2 = AE.AF$

Giải:



Xét tứ giác ABOC có:

$$A\hat{B}O + A\hat{C}O = 90^0 + 90^0 = 180^0$$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow$ Tứ giác ABOC nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

Xét ΔABE và ΔAFB có:

$B\hat{A}E$: chung

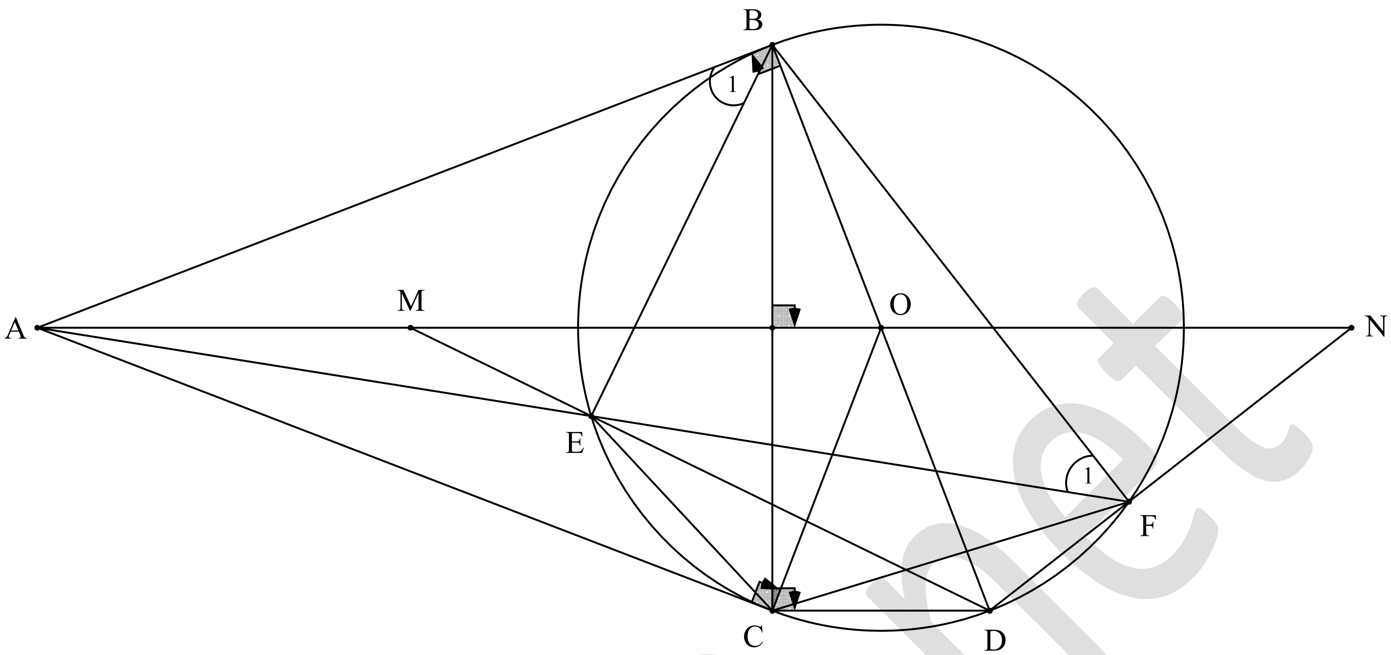
$\hat{B}_1 = \hat{F}_1$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta AFB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AF} = \dfrac{AE}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AE.AF \Leftrightarrow AC^2 = AE.AF$ (vì AB = AC: tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

b) Chứng minh AO // CD và $\Delta CEF \backsim \Delta DNM$

Giải:



Ta có AB = AC (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

OB = OC = R

$\Rightarrow$ AO là đường trung trực của đoạn thẳng BC

$\Rightarrow$ AO $\perp$ BC (1)

Ta có $\widehat{BCD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow$ CD $\perp$ BC (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AO // CD (quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song)

Ta có $\widehat{CFE} = \widehat{CDE}$ (cùng chắn cung EC của đường tròn (O))

$= \widehat{DMN}$ (1) (vì CD // MN và 2 góc ở vị trí so le trong)

Xét ΔCEF và ΔDNM có:

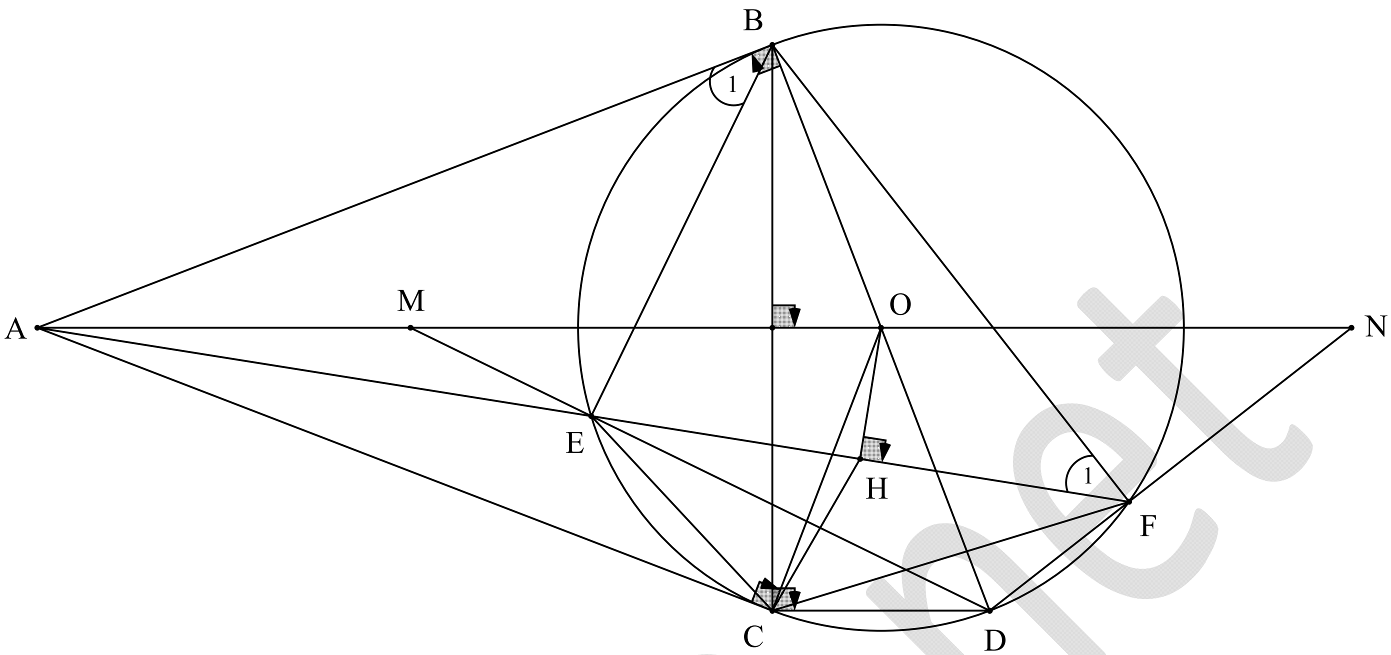
$\widehat{ECF} = \widehat{NDM}$ (cùng chắn cung EF của đường tròn (O))

$\widehat{CFE} = \widehat{DMN}$ (do (1))

$\Rightarrow \Delta CEF \backsim \Delta DNM$ (g.g)

c) Vẽ OH vuông góc với EF tại H. Chứng minh EH.DN = ON.CE

Giải:



Ta có $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = \widehat{AHO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến và OH $\perp$ EF)

$\Rightarrow$ 5 điểm A, B, O, H, C cùng thuộc đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow \widehat{EHC} = \widehat{AOC}$ (cùng chắn cung AC của đường tròn đường kính AO)

$= \widehat{AOB}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$= \widehat{NOD}$ (2) (2 góc đối đỉnh)

Ta có $\Delta CEF \backsim \Delta DNM$ (do trên)

$\Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{DNM}$ (2 góc tương ứng)

Hay $\Rightarrow \widehat{CEH} = \widehat{DNO}$ (3)

Xét ΔHEC và ΔOND có:

$\widehat{EHC} = \widehat{NOD}$ (do (2))

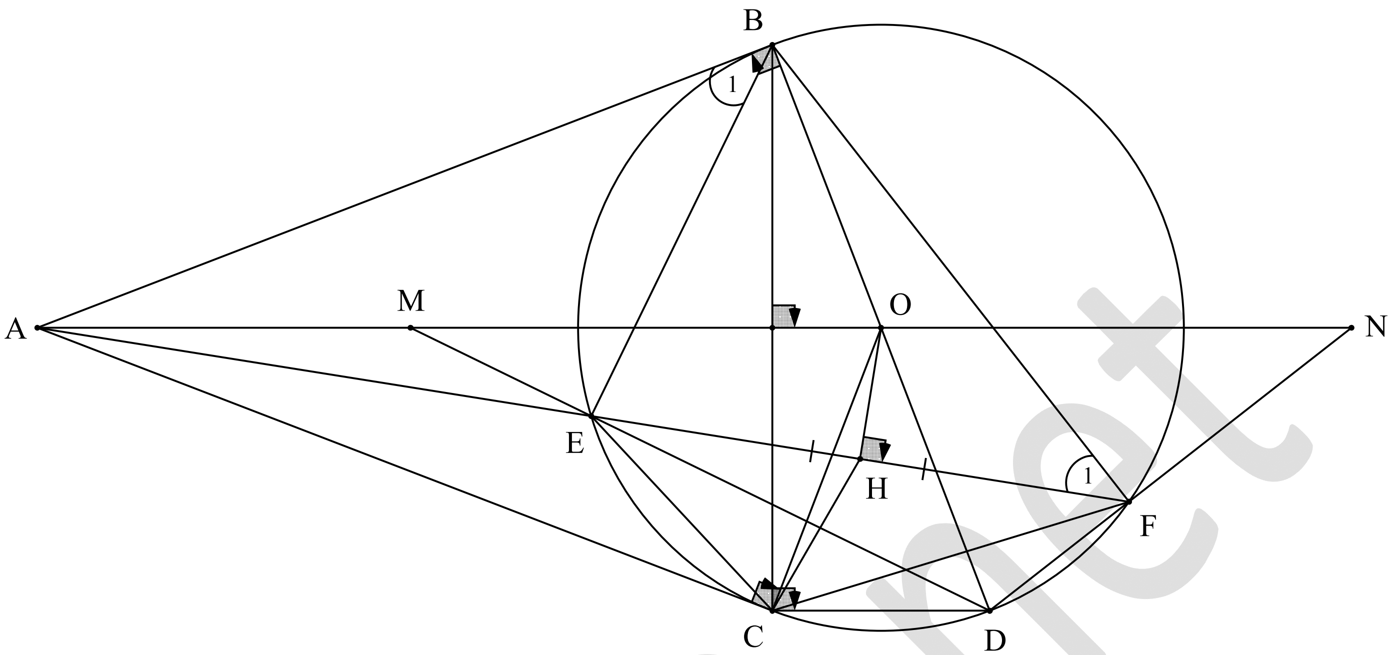
$\widehat{CEH} = \widehat{DNO}$ (do (3))

$\Rightarrow \Delta HEC \backsim \Delta OND$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EH}{ON} = \dfrac{CE}{DN} \Leftrightarrow EH.DN = ON.CE$ (4)

d) Chứng minh OM = ON

Giải:



Ta có $\Delta CEF \backsim \Delta DNM$ (cmt)

$\Rightarrow \dfrac{EF}{MN} = \dfrac{CE}{DN}$ (5)

Ta có $\dfrac{EH}{ON} = \dfrac{CE}{DN}$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \dfrac{EF}{MN} = \dfrac{EH}{ON} \Leftrightarrow MN = \dfrac{EF}{EH}.ON$ (7)

Ta có $OH \perp EF$

$\Rightarrow$ H là trung điểm của EF

$\Rightarrow \dfrac{EF}{EH} = 2$ (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow$ MN = 2.ON

$\Rightarrow$ O là trung điểm của MN

$\Rightarrow$ OM = ON