BÀI GIẢI

Câu 1: Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $5x^2 = 4\left(x\sqrt{5} - 1\right)$ (1)

Giải:

$$\left(1\right) \Leftrightarrow 5x^2 = 4\sqrt{5}x - 4$$
$$\Leftrightarrow 5x^2 - 4\sqrt{5}x + 4 = 0$$

Ta có $\Delta' = \left(-2\sqrt{5}\right)^2 - 5.4 = 20 - 20 = 0$

Do $\Delta' = 0$ nên phương trình (1) có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = -\frac{-2\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S = \left\{\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$

b) $3x^4 - 5x^2 = 8$ (2)

Giải:

$$\left(2\right) \Leftrightarrow 3x^4 - 5x^2 - 8 = 0$$

Đặt $t = x^2$ $\left(t \ge 0\right)$

Phương trình (2) trở thành: $3t^2 - 5t - 8 = 0$ (*)

Ta có $a - b + c = 3 - \left(-5\right) + \left(-8\right) = 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm:

$$t_1 = -1 \text{ (loại)};\ t_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{-8}{3} = \frac{8}{3} \text{ (nhận)}$$

Với $t_2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là: $S = \left\{\frac{2\sqrt{6}}{3}; -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$

c) Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi là 56m. Nếu giảm chiều rộng 2m và tăng chiều dài 4m thì diện tích tăng thêm 8m². Tìm độ dài các cạnh của hình chữ nhật

Giải:

Gọi x, y (m) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật (y > x > 0)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2\left(x + y\right) = 56 \\ \left(x - 2\right)\left(y + 4\right) = xy + 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 28 \\ xy + 4x - 2y - 8 = xy + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 28 \\ 4x - 2y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 28 \\ 2x - y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 36 \\ 2x - y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ 24 - y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 16 \end{cases} \text{ (thỏa)}$$

Vậy miếng đất hình chữ nhật có chiều rộng là 12m, chiều dài 16m

d) $\begin{cases} 2x - 3y = -19 \\ 3x - 2y = -16 \end{cases}$ (3)

Giải:

$$\left(3\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = -38 \\ -9x + 6y = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 10 \\ 3x - 2y = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ -6 - 2y = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình (3) là: $\left(x; y\right) = \left(-2; 5\right)$

Câu 2: Cho hàm số $(P): y=\frac{x^2}{2}$

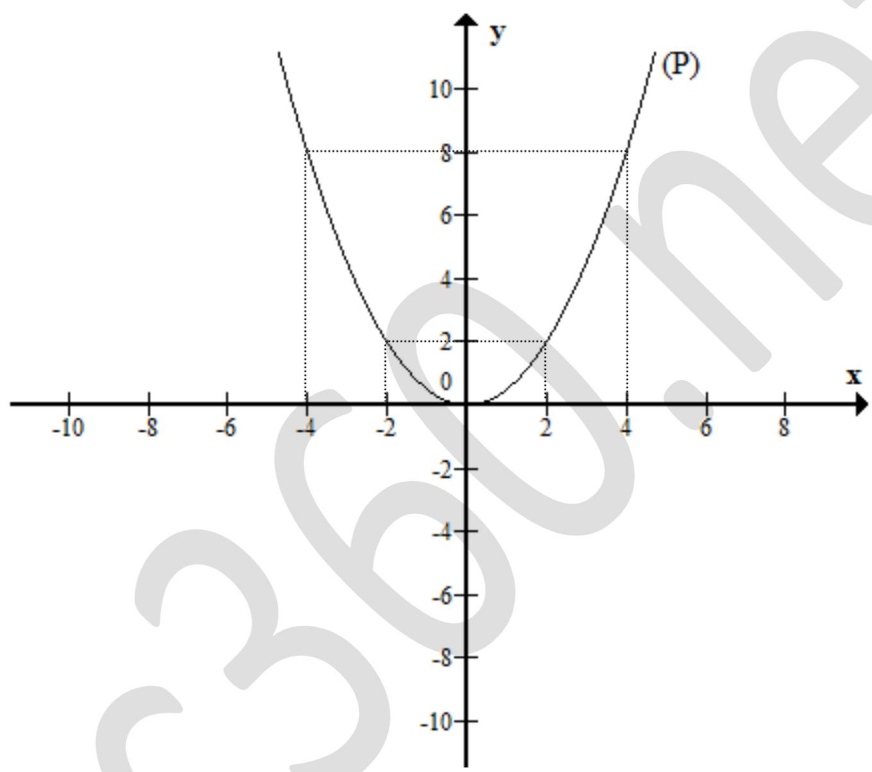
a) Vẽ (P) trên hệ trục tọa độ Oxy

Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y=\frac{x^2}{2}$	8	2	0	2	8

Đồ thị



b) Xác định m để đường thẳng $(d): y=x-m$ cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 1

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) có dạng: $\frac{1}{2}x^2=x-m$ (*)

Do (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 1 nên x = 1 là nghiệm của (*)

$\Rightarrow \frac{1}{2}.1^2=1-m \Leftrightarrow \frac{1}{2}=1-m \Leftrightarrow m=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Vậy $m=\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm

Câu 3: Rút gọn biểu thức sau:

a) $A=\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{2\sqrt{5}+2}$

Giải:

$T=\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{\sqrt{5}+2}$ $(T>0)$

$\Leftrightarrow T^2=\sqrt{5}-2+2\sqrt{\sqrt{5}-2}\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{5}+2=2\sqrt{5}+2\sqrt{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=2\sqrt{5}+2\sqrt{5-4}=2\sqrt{5}+2$

$\Rightarrow T = \sqrt{2\sqrt{5}+2}$ (vì T > 0)

$\Rightarrow A = \sqrt{2\sqrt{5}+2} - \sqrt{2\sqrt{5}+2} = 0$

Vậy A = 0

b) $B = \left(\dfrac{2a+1}{\sqrt{a^3}-1} - \dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}\right).\left(\dfrac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$

Giải:

$$B = \left(\frac{2a+1}{\sqrt{a^3}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}\right).\left(\frac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right) = \left(\frac{2a+1}{\left(\sqrt{a}\right)^3 - 1^3} - \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}\right)\left(\frac{1+\left(\sqrt{a}\right)^3}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$$

$$= \left(\frac{2a+1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)} - \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}\right)\left(\frac{\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}+a\right)}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$$

$$= \frac{2a+1-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}\left(1-\sqrt{a}+a-\sqrt{a}\right) = \frac{2a+1-a+\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}\left(a-2\sqrt{a}+1\right)$$

$$= \frac{a+\sqrt{a}+1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}\left(\sqrt{a}-1\right)^2 = \sqrt{a}-1$$

c) Số cân nặng (tính tròn đến kg) của 20 học sinh lớp 3 trong một lớp như sau:

30	36	30	32	36	39	30	36	28	32
31	30	32	31	45	40	31	31	31	30

Lập bảng tần số và so sánh tỉ lệ học sinh đạt chuẩn về cân nặng với tỉ lệ học sinh béo phì, suy dinh dưỡng (đạt chuẩn từ 30 kg đến 35 kg)

Giải:

Giá trị (x)	Tần số (n)
28	1
30	5
31	5
32	3
36	3
39	1
40	1
45	1
	N = 20

Tỉ lệ học sinh đạt chuẩn là: $\dfrac{(5+5+3).100\%}{20} = 65\%$

Tỉ lệ học sinh béo phì, suy dinh dưỡng là: $\dfrac{(1+3+1+1+1).100\%}{20}=35\%$

Tỉ lệ học sinh đạt chuẩn lớn hơn tỉ lệ học sinh béo phì, suy dinh dưỡng (vì 65% > 35%)

Câu 4: Cho phương trình bậc hai: $x^2-mx+m-1=0$ (1)

a) Chứng tỏ rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm với mọi giá trị của m

Giải:

Ta có $\Delta=(-m)^2-4.1.(m-1)=m^2-4m+4=(m-2)^2\ge 0,\forall m$

Do $\Delta\ge 0,\forall m$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm với mọi giá trị của m

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt đều dương

Giải:

Để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt đều dương $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(m-2)^2>0\\ -\dfrac{-m}{1}>0\\ \dfrac{m-1}{1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 2\\ m>0\\ m>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 2\\ m>1\end{cases}$$

Vậy $\begin{cases}m\ne 2\\ m>1\end{cases}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt đều dương

c) Tìm m để biểu thức $A=\dfrac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+1}$ đạt GTLN và đạt GTNN. Tính GTNN, GTLN ấy

Giải:

Theo câu b, với $\begin{cases}m\ne 2\\ m>1\end{cases}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt đều dương thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-m}{1}=m\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{m-1}{1}=m-1\end{cases}$$

Ta có: $A=\dfrac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+1}=\dfrac{2x_1x_2+3}{(x_1+x_2)^2+1}=\dfrac{2(m-1)+3}{m^2+1}=\dfrac{2m+1}{m^2+1}$ (do hệ thức Vi-ét)

$$\Leftrightarrow(m^2+1)A=2m+1\Leftrightarrow m^2A+A-2m-1=0\Leftrightarrow Am^2-2m+A-1=0\ (*)$$

Để biểu thức A đạt GTLN và GTNN khi và chỉ khi (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow\Delta'\ge 0\Leftrightarrow(-1)^2-A(A-1)\ge 0\Leftrightarrow 1-A^2+A\ge 0\Leftrightarrow A^2-A-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(A^2-A+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}-1\le 0\Leftrightarrow\left(A-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow\sqrt{\left(A-\frac{1}{2}\right)^2}\le\sqrt{\frac{5}{4}}\Leftrightarrow\left|A-\frac{1}{2}\right|\le\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{5}}{2}\le A-\frac{1}{2}\le\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\le A\le\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{5}}{2}\le A\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ta có $A=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\frac{2m+1}{m^2+1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow 4m+2=\left(1-\sqrt{5}\right)m^2+1-\sqrt{5}\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{5}\right)m^2-4m-1-\sqrt{5}=0$

$\Leftrightarrow m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (tự giải)

Ta có $A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\frac{2m+1}{m^2+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow 4m+2=\left(1+\sqrt{5}\right)m^2+1+\sqrt{5}\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{5}\right)m^2-4m-1+\sqrt{5}=0$

$\Leftrightarrow m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (tự giải)

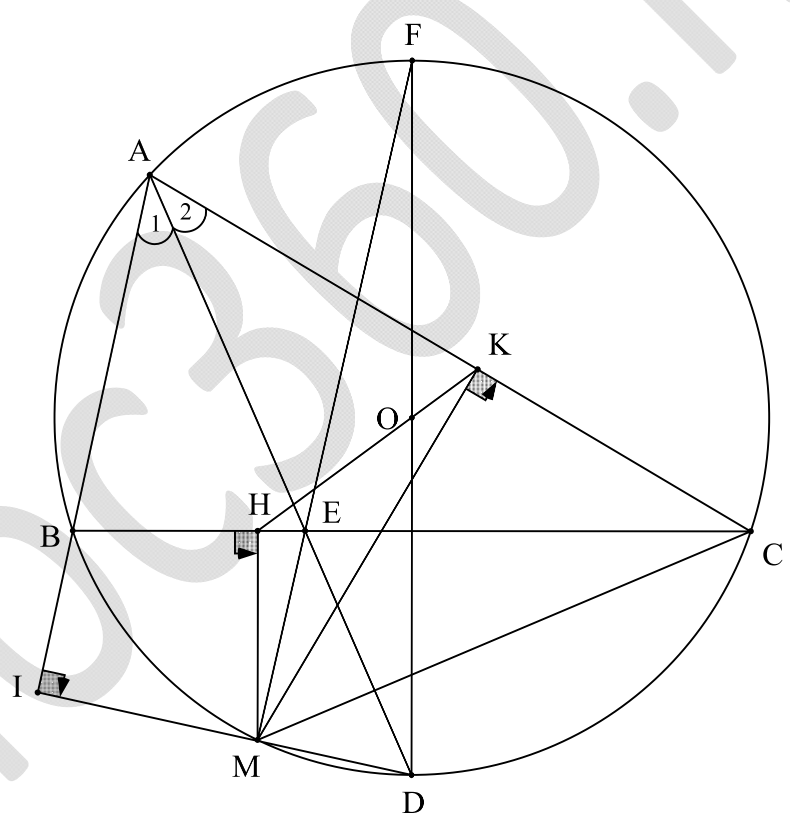
Vậy biểu thức đạt GTNN là $\text{MinA}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ khi và chỉ khi $m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Và biểu thức đạt GTNN là $\text{MaxA}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ khi và chỉ khi $m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Câu 5: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), tia phân giác của góc BAC cắt BC tại E và (O) tại D, vẽ đường kính DF của (O), FE cắt (O) tại M. Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu của M lên AB, BC, AC

a) Chứng minh: Tứ giác BHMI và MHKC nội tiếp

Giải:



Xét tứ giác BHMI có:

$\widehat{MIB}+\widehat{MHB}=90^0+90^0=180^0$ (vì MI ⊥ AB, MH ⊥ BC)

$\Rightarrow$ Tứ giác BHMI nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

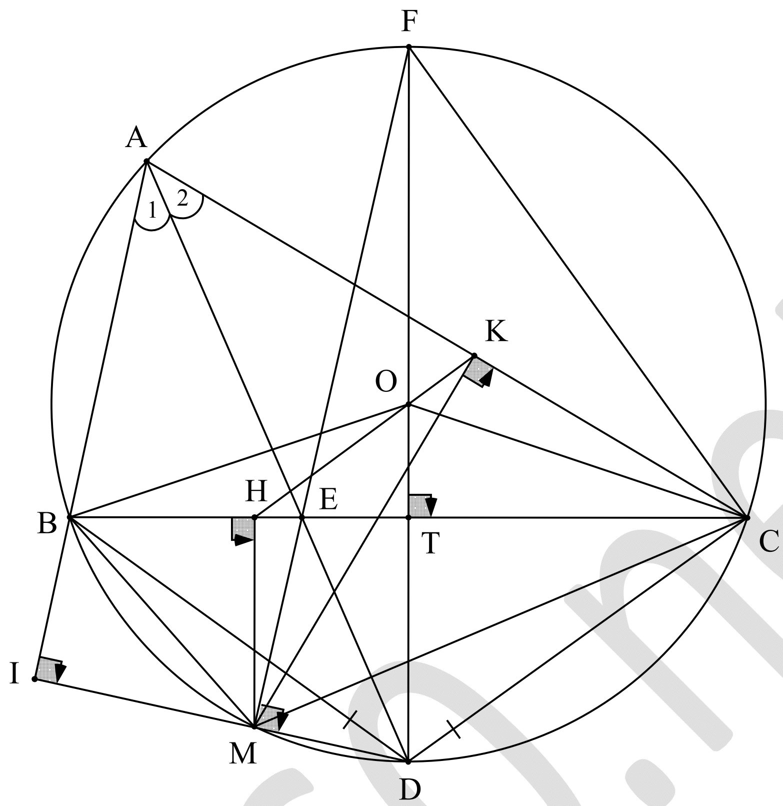
Xét tứ giác MHKC có:

$\widehat{MHC}=\widehat{MKC}=90^0$ (vì MH ⊥ BC, MK ⊥ AC)

$\Rightarrow$ Tứ giác MHKC nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh H, K liên tiếp cùng nhìn cạnh MC dưới 1 góc vuông)

b) Chứng minh: FE.FM = CF^2

Giải:



Ta có $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (vì AD là phân giác của góc BAC)

$\Rightarrow$ Cung DB = Cung DC (so sánh 2 cung)

$\Rightarrow$ DB = DC (liên hệ giữa cung và dây)

Mà OB = OC (bằng bán kính đường tròn (O))

$\Rightarrow$ OD là đường trung trực của đoạn BC

$\Rightarrow$ OD $\perp$ BC tại T

Ta có $F\hat{M}D = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Ta có $F\hat{E}C = F\hat{D}M$ (cùng phụ góc EFT)

$= F\hat{C}M$ (1) (cùng chắn cung FM của đường tròn (O))

Xét ΔFEC và ΔFCM có:

$E\hat{F}C$: chung

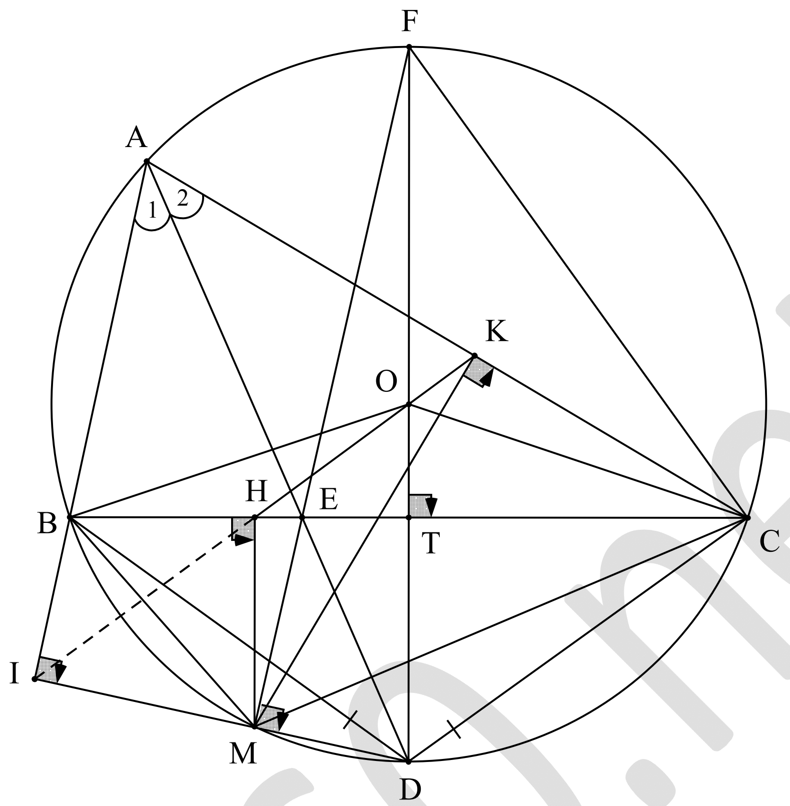
$F\hat{E}C = F\hat{C}M$ (do (1))

$\Rightarrow \Delta FEC \backsim \Delta FCM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{FE}{FC} = \dfrac{FC}{FM} \Leftrightarrow FE.FM = FC^2$

c) Chứng minh: I, H, K thẳng hàng

Giải:



Ta có $\widehat{IHK} = \widehat{IHM} + \widehat{MHK}$

$= \widehat{IBM} + \widehat{MHK}$ (cùng chắn cung IM của tứ giác IBHM nội tiếp)

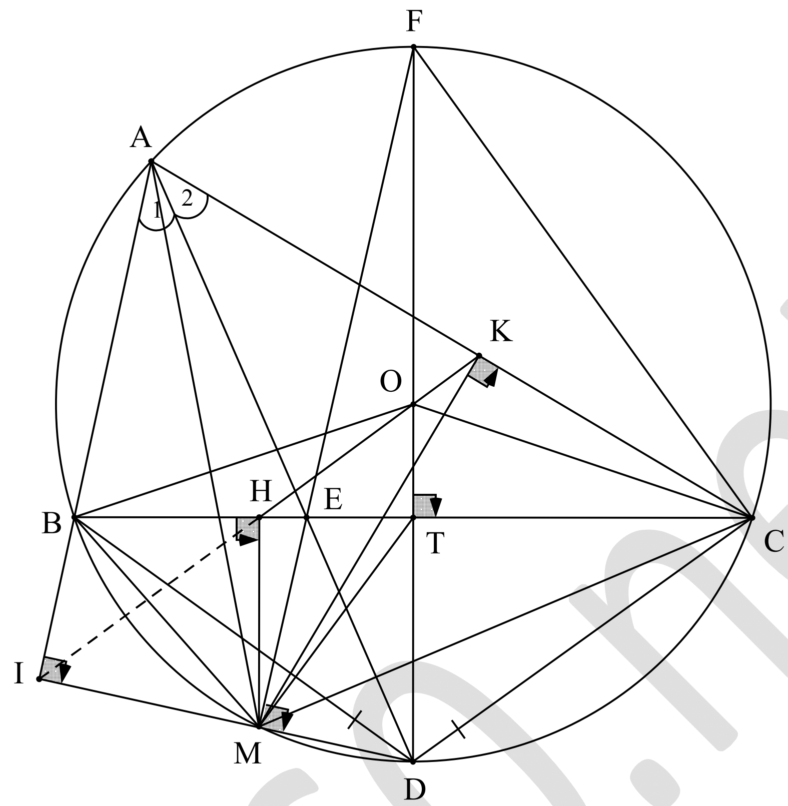
$= \widehat{ACM} + \widehat{MHK}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác ABMC nội tiếp (O))

$= 180^0$ (tổng 2 góc đối của tứ giác MHKC nội tiếp)

$\Rightarrow$ 3 điểm I, H, K thẳng hàng

d) Chứng minh: H là trung điểm IK

Giải:



Xét ΔBMC và ΔIMK có:

$\widehat{MBC} = \widehat{MIK}$ (cùng chắn cung HM của tứ giác IBHM nội tiếp)

$\widehat{BCM} = \widehat{IKM}$ (cùng chắn cung HM của tứ giác MHKC nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta BMC \backsim \Delta IMK$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BC}{IK} = \dfrac{BM}{IM} \Rightarrow IK = \dfrac{BC.IM}{BM}$ (*)

Xét tứ giác METD có:

$\widehat{DME} + \widehat{DTE} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ (vì $\widehat{FMD} = 90^0$, $OD \perp BC$)

$\Rightarrow$ Tứ giác METD nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

$\Rightarrow \widehat{BTM} = \widehat{EDM}$ (cùng chắn cung EM của tứ giác METD nội tiếp)

$= \widehat{ACM}$ (cùng chắn cung AM của đường tròn (O))

$= \widehat{IBM}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác ABMC nội tiếp)

$= \widehat{IHM}$ (2) (cùng chắn cung IM của tứ giác IBHM nội tiếp)

Xét ΔHIM và ΔTBM có:

$\widehat{HIM} = \widehat{TBM}$ (cùng chắn cung HM của tứ giác IBHM nội tiếp)

$\widehat{IHM} = \widehat{BTM}$ (do (2))

$\Rightarrow \Delta HIM \backsim \Delta TBM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IH}{BT} = \dfrac{IM}{BM} \Rightarrow IH = \dfrac{BT.IM}{BM}$ (**)

Ta có $OD \perp BC$

$\Rightarrow$ T là trung điểm của BC

$\Rightarrow BT = \dfrac{BC}{2}$ (***)

Từ (*), (**) và (***) $\Rightarrow$ $IH = \frac{1}{2}IK$

$\Rightarrow$ H là trung điểm IK