BÀI GIẢI

Câu 1: Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $2x(3x+1)+1=3(x^2+2)$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow 6x^2+2x+1=3x^2+6$$
$$\Leftrightarrow 6x^2+2x+1-3x^2-6=0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+2x-5=0$$

Ta có $a+b+c=3+2+(-5)=0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm:

$$x_1=1; x_2=\frac{c}{a}=\frac{-5}{3}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\left\{1;\frac{-5}{3}\right\}$

b) $5x^4+2x^2-16=10-x^2$ (2)

Giải:

$$(2) \Leftrightarrow 5x^4+2x^2-16+x^2-10=0$$
$$\Leftrightarrow 5x^4+3x^2-26=0$$

Đặt $t=x^2$ $(t\geq 0)$

Phương trình (2) trở thành: $5t^2+3t-26=0$ (*)

Ta có $\Delta=3^2-4.5.(-26)=9+520=529>0; \sqrt{\Delta}=\sqrt{529}=23$

Do $\Delta>0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$t_1=\frac{-3+23}{2.5}=2 \text{ (nhận)}; \ t_2=\frac{-3-23}{2.5}=\frac{-13}{5} \text{ (loại)}$$

Với $t_1=2 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là: $S=\left\{\sqrt{2};-\sqrt{2}\right\}$

c) Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 140m. Tính diện tích hình chữ nhật biết ba lần chiều rộng hơn hai lần chiều dài là 16m

Giải:

Gọi x, y (m) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật (y > x > 0)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x+y)=140 \\ 3x-2y=16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=140 \\ 3x-2y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=156 \\ 3x-2y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=31,2 \\ 93,6-2y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=31,2 \\ y=38,8 \end{cases}$$

Vậy diện tích hình chữ nhật là: $xy=31,2.38,8=1210,56\left(m^2\right)$

d) $\begin{cases} 2(x-y)+3(2x+1)=3(x-2)+y \\ -4(x+y)+5(y-2)=-5x-2y-9 \end{cases}$ (3)

Giải:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+6x+3=3x-6+y \\ -4x-4y+5y-10=-5x-2y-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y-3x-y=-6-3 \\ -4x-4y+5y+5x+2y=-9+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-3y=-9 \\ x+3y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0=-8 \\ x+3y=1 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm

Câu 2: Cho hàm số $(P): y = \frac{x^2}{4}$ và $(d): y = x + 3$

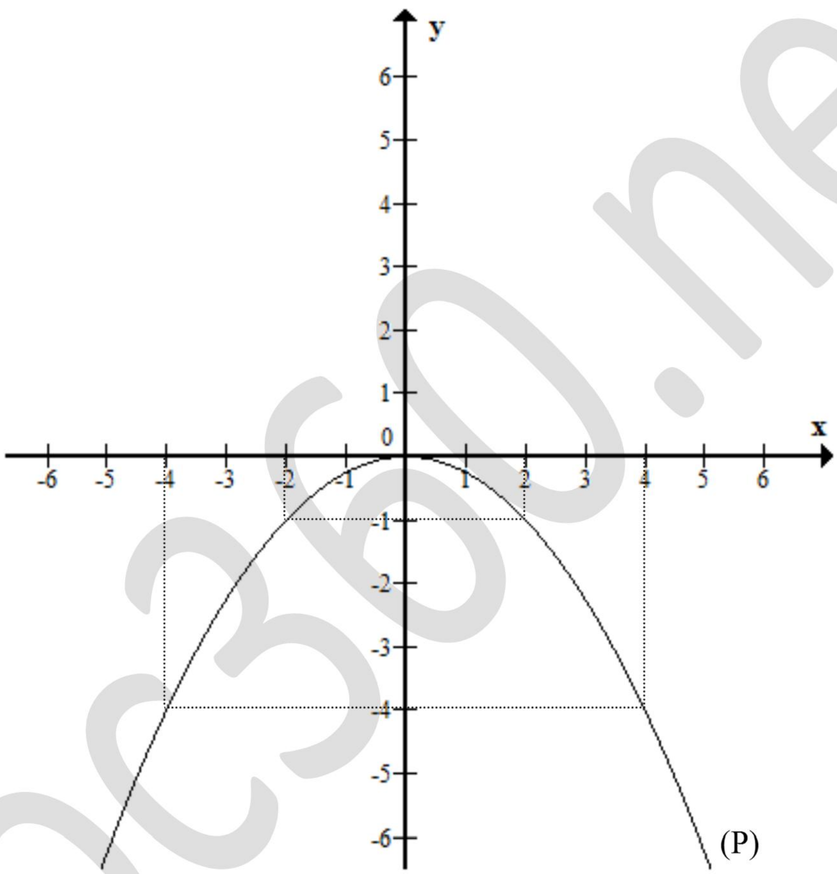
a) Vẽ (P) trên hệ trục tọa độ Oxy

Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{x^2}{4}$	4	1	0	1	4

Đồ thị



b) Viết phương trình đường thẳng (d’) biết (d’) song song với (d) và cắt (P) tại điểm có hoành độ là 2

Giải:

Gọi phương trình đường thẳng (d’) có dạng: $y = ax + b \ (a \neq 0)$

Ta có $(d')//(d) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 3 \end{cases}$ (nhận) $\Rightarrow (d'): y = x + b \ (b \neq 3)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d’) và (P) có dạng: $\frac{x^2}{4} = x + b$ (*)

Do (d’) cắt (P) tại điểm có hoành độ là 2 nên x = 2 là nghiệm của (*)

$\Rightarrow \frac{2^2}{4} = 2 + b \Leftrightarrow 1 = 2 + b \Leftrightarrow b = -1$ (thỏa)

Vậy phương trình đường thẳng (d’) là $y = x - 1$

Câu 3: Rút gọn biểu thức sau:

a) $A=\sqrt{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Giải:

Ta có $A=\sqrt{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\left|1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|-\left|\sqrt{3}+1\right|}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}}\ \left(\text{vì } 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}>0;\sqrt{3}+1>0\right)$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

b) $B=\dfrac{3-\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{3}}}}}{3-\sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{3}}}}+\dfrac{2+\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{3}}}}}{3+\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{3}}}}}$

Giải:

Đặt $t=\sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{3}}}\ (t>0)$

$$\Rightarrow B=\frac{3-\sqrt{6+t}}{3-t}+\frac{2+\sqrt{6+t}}{3+\sqrt{6+t}}=\frac{3-\sqrt{6+t}}{3-t}+\frac{3+\sqrt{6+t}-1}{3+\sqrt{6+t}}=\frac{3-\sqrt{6+t}}{3-t}+1-\frac{1}{3+\sqrt{6+t}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{6+t}}{3-t}-\frac{1}{3+\sqrt{6+t}}+1=\frac{\left(3-\sqrt{6+t}\right)\left(3+\sqrt{6+t}\right)-(3-t)}{(3-t)\left(3+\sqrt{6+t}\right)}+1=\frac{9-(6+t)-(3-t)}{(3-t)\left(3+\sqrt{6+t}\right)}+1$$

$$=\frac{9-6-t-3+t}{(3-t)\left(3+\sqrt{6+t}\right)}+1=0+1=0$$

Vậy $B=0$

c) $C=\left(\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+2\sqrt{y}}\right).\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}\ \left(x\neq y\right)$

Giải:

Ta có $C=\left(\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+2\sqrt{y}}\right).\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$

$$=\left(\frac{2\sqrt{x}\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\right).\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$=\frac{4\sqrt{x}\sqrt{y}+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}.\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}.\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=1$$

Vậy $C=1$

d) Ông An gửi ngân hàng x triệu đồng. Ông có 2 lựa chọn:
Ngân hàng A lãi suất 10% năm, lãi được tính trên gốc
Ngân hàng B lãi suất 9,6 % năm (0,8% tháng) và lãi tháng này được tính gộp vào vốn tháng sau
Hỏi sau hai năm thì số tiền cả vốn lẫn lãi ông An rút ra ở ngân hàng nào nhiều hơn?

Giải:

Số tiền cả vốn lẫn lãi ông An rút ra ở ngân hàng A sau 2 năm là:

$x + 2.x.10\% = 1{,}2x$ (triệu đồng)

Số tiền cả vốn lẫn lãi ông An rút ra ở ngân hàng B sau 2 năm là:

$x(1+0{,}8\%)^{24} \approx 1{,}21x$ (triệu đồng)

Vậy sau 2 năm lãi suất mà ông An rút ra ở ngân hàng B nhiều hơn ngân hàng A (vì 1,21x > 1,2x)

Câu 4: Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 4mx + 4m - 3 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

Giải:

Ta có $\Delta' = (-2m)^2 - 1.(4m-3) = 4m^2 - 4m + 3 = (4m^2 - 4m + 1) + 2 = (2m-1)^2 + 2 \geq 2 > 0, \forall m$

Do $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình (1) luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với mọi m

Giải:

Theo câu a, với mọi m phương trình (1) luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-4m}{1} = 4m \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4m-3}{1} = 4m-3 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1x_2 = x_1 + x_2 - 3$ (hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m)

c) Tìm m để biểu thức: $A = \dfrac{8(x_1+x_2+1)}{(x_1+x_2)^2 + 16(x_1+x_2-x_1x_2)}$ đạt GTLN và GTNN

Giải:

Ta có: $A = \dfrac{8(x_1+x_2+1)}{(x_1+x_2)^2 + 16(x_1+x_2-x_1x_2)}$

$= \dfrac{8(4m+1)}{(4m)^2 + 16[4m-(4m-3)]}$ (do hệ thức Vi-ét)

$= \dfrac{8(4m+1)}{16m^2+48} = \dfrac{4m+1}{2m^2+6}$

Ta có $A = \dfrac{4m+1}{2m^2+6} \Leftrightarrow (2m^2+6)A = 4m+1 \Leftrightarrow 2m^2A + 6A - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow (2A)m^2 - 4m + (6A-1) = 0$ (*)

Để A đạt GTLN và GTNN khi và chỉ khi (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow (-2)^2 - 2A.(6A-1) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 12A^2 + 2A \geq 0 \Leftrightarrow 6A^2 - A - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (2A+1)(3A-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2A+1 \geq 0 \\ 3A-2 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2A+1 \leq 0 \\ 3A-2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq -\dfrac{1}{2} \\ A \leq \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} A \leq -\dfrac{1}{2} \\ A \geq \dfrac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \leq A \leq \dfrac{2}{3} \\ A = \phi \end{array}\right. \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq A \leq \dfrac{2}{3}$$

Khi $A = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{4m+1}{2m^2+6} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 8m+2 = -2m^2-6 \Leftrightarrow 2m^2+8m+8 = 0 \Leftrightarrow 2(m^2+4m+4) = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 = 0 \Leftrightarrow m+2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$$

Khi $A=\frac{2}{3}\Leftrightarrow \frac{4m+1}{2m^2+6}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 12m+3=4m^2+12\Leftrightarrow 4m^2-12m+9=0\Leftrightarrow (2m-3)^2=0\Leftrightarrow 2m-3=0$

$\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$

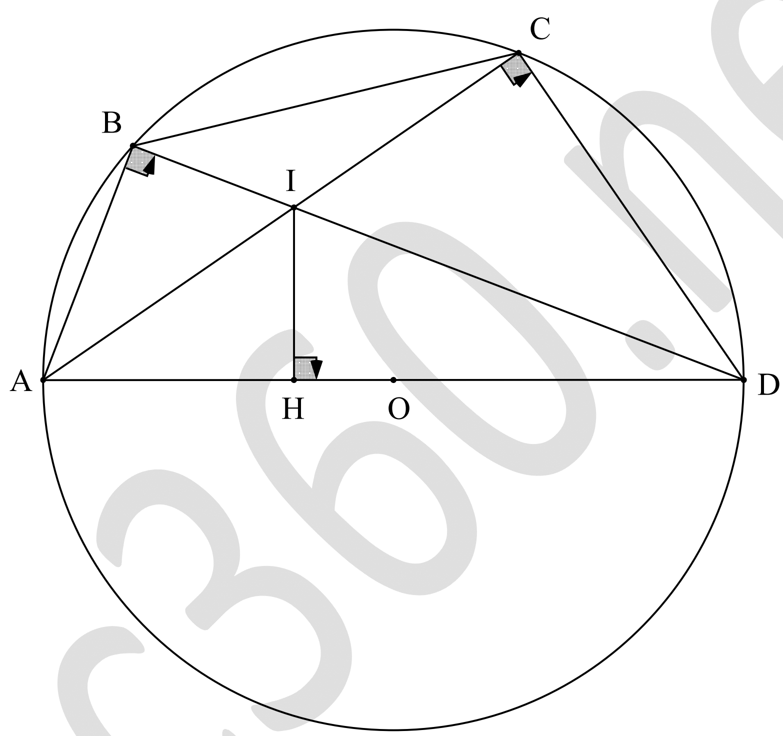
Với $m=-2$ thì biểu thức A đạt GTNN là MinA = $-\frac{1}{2}$

Với $m=\frac{3}{2}$ thì biểu thức A đạt GTLN là MaxA = $\frac{2}{3}$

Câu 5: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AD, AC cắt BD tại I, IH vuông góc AD tại H

a) Chứng minh: Tứ giác ABIH nội tiếp và IA.IC = IB.ID

Giải:



Ta có $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Xét tứ giác ABIH có:

$\widehat{ABI}+\widehat{AHI}=90^0+90^0=180^0$ (vì $\widehat{ABD}=90^0$ và IH $\perp$ AD)

$\Rightarrow$ Tứ giác ABIH nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

Xét ΔIBA và ΔICD có:

$\widehat{BIA}=\widehat{CID}$ (2 góc đối đỉnh)

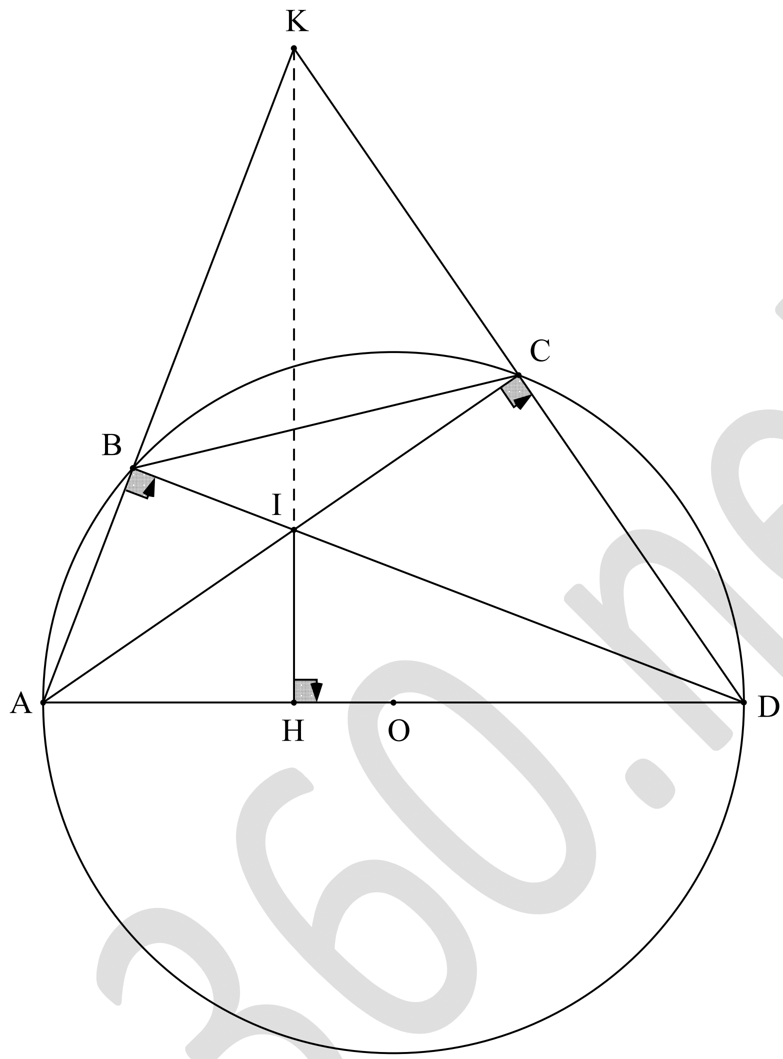
$\widehat{IBA}=\widehat{ICD}=90^0$ (vì $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=90^0$)

$\Rightarrow \Delta IBA \backsim \Delta ICD$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{IA}{ID}=\frac{IB}{IC}\Leftrightarrow IA.IC=IB.ID$

b) AB cắt CD tại K. Chứng minh: K, I, H thẳng hàng

Giải:



Xét ΔKAD có: AC và DB là 2 đường cao cắt nhau tại I

$\Rightarrow$ I là trực tâm của ΔKAD

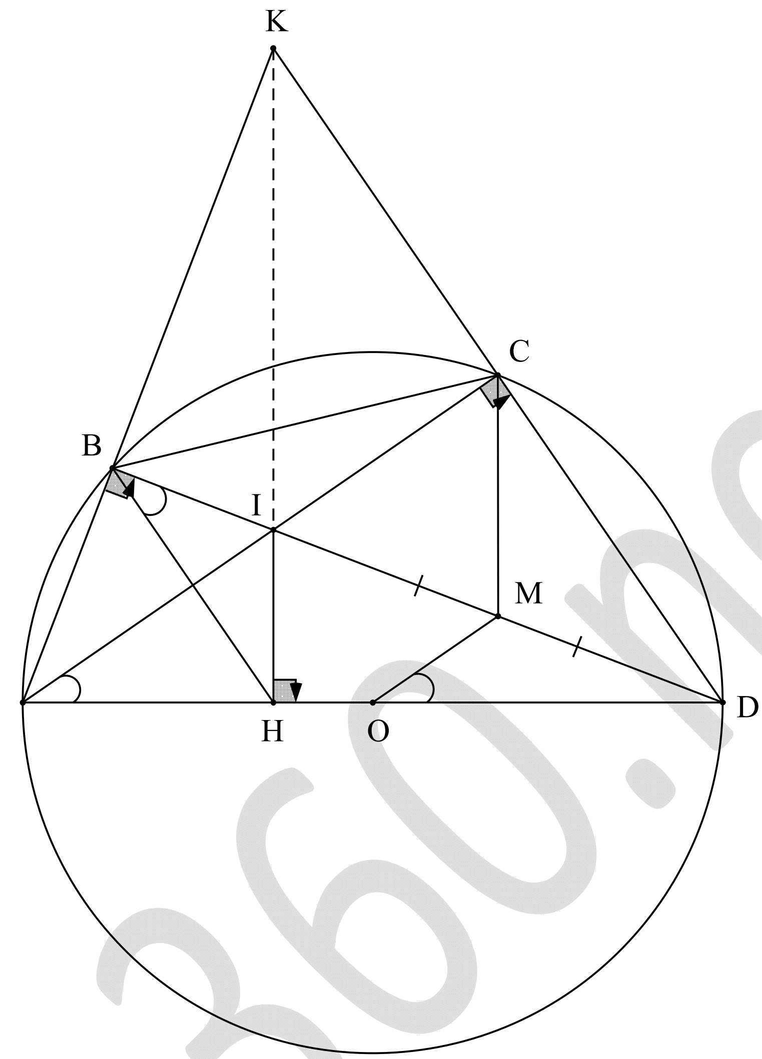
$\Rightarrow$ KI $\perp$ AD

Mà IH $\perp$ AD (gt)

$\Rightarrow$ 3 điểm K, I, H thẳng hàng

c) Gọi M là trung điểm ID. Chứng minh: CM.BD = DH.OA

Giải:



Xét ΔDIA có: M là trung điểm của ID và O là trung điểm của DA

$\Rightarrow$ OM là đường trung bình của ΔDIA

$\Rightarrow$ OM // IA

$\Rightarrow \widehat{MOD} = \widehat{IAD}$ (2 góc ở vị trí đồng vị)

$= \widehat{HBD}$ (1) (cùng chắn cung IH của tứ giác ABIH nội tiếp)

Xét ΔDOM và ΔDBH có:

$\widehat{ODM}$: chung

$\widehat{MOD} = \widehat{HBD}$ (do (1))

$\Rightarrow$ ΔDOM ∽ ΔDBH (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{DM}{DH} \Leftrightarrow DO.DH = DM.DB$ (2)

Ta có ΔICD vuông tại C và có CM là trung tuyến

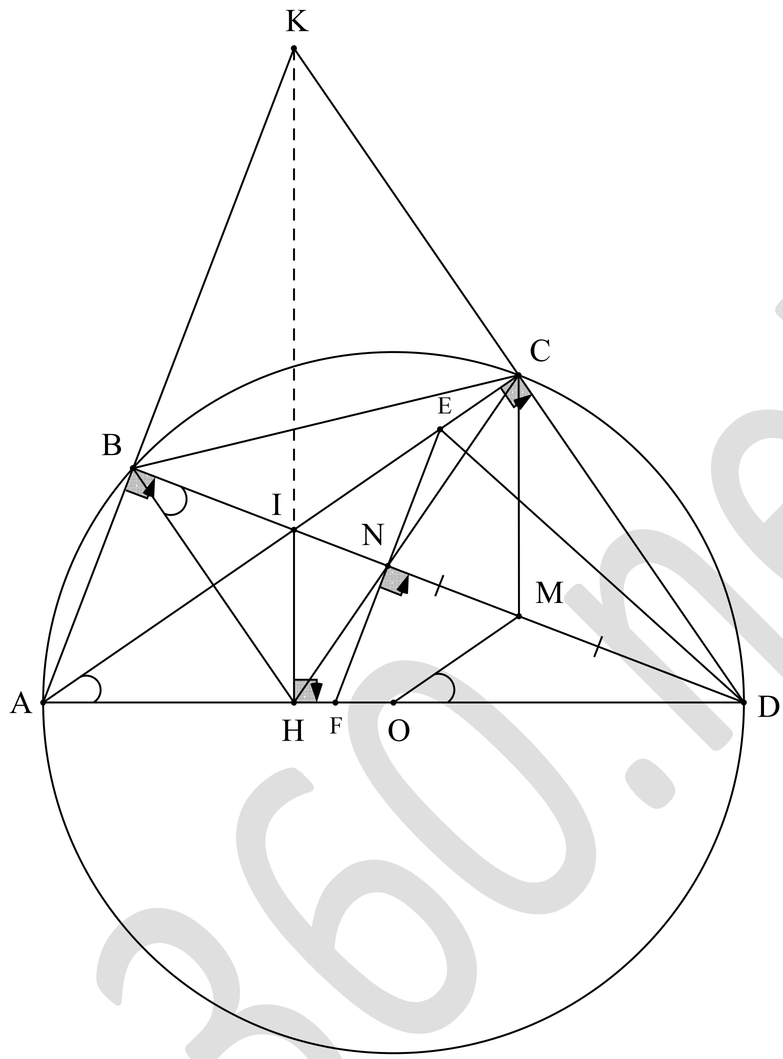
$\Rightarrow CM = \dfrac{ID}{2} = MD$ (3)

Ta có OD = OA (4) (bán kính đường tròn (O))

Từ (2), (3) và (4) $\Rightarrow$ CM.BD = DH.OA

d) Gọi N là giao điểm của BD, HC. Qua N vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt AC, AD lần lượt tại E, F. Chứng minh: N là trung điểm EF

Giải:



Xét tứ giác NECD có:

$$\widehat{END}+\widehat{ECD}=90^0+90^0=180^0 \text{ (vì EN} \perp \text{BD, AC} \perp \text{CD)}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác NECD nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

$\Rightarrow \widehat{NED}=\widehat{NCD}$ (cùng chắn cung ND của tứ giác NECD nội tiếp)

Hay $\widehat{FED}=\widehat{HCD}$ (5)

Xét tứ giác AKCH có:

$$\widehat{KHA}=\widehat{KCA}=90^0 \text{ (vì KH} \perp \text{AD, AC} \perp \text{KD)}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AKCH nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh H, C liên tiếp cùng nhìn cạnh KA dưới 1 góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{HCD}=\widehat{KAH}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác AKCH nội tiếp)

$=\widehat{EFD}$ (6) (vì EF // KA: cùng vuông góc với BD và 2 góc ở vị trí đồng vị)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \widehat{FED}=\widehat{EFD}$ (7)

Xét ΔDEF có: $\widehat{FED}=\widehat{EFD}$ (do (7))

$\Rightarrow$ ΔDEF cân tại D nên DN là đường cao cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow$ N là trung điểm của EF