BÀI GIẢI

Câu 1:

a) Giải phương trình: $5x^4+2x^2-16=10-x^2$ (1)

Giải:

$(1)\Leftrightarrow 5x^4+2x^2-16-10+x^2=0$

$\Leftrightarrow 5x^4+3x^2-26=0$

Đặt $t=x^2\ (t\ge 0)$

Phương trình (1) trở thành: $5t^2+3t-26=0$ (*)

Ta có $\Delta=3^2-4.5.(-26)=9+520=529>0;\sqrt{\Delta}=\sqrt{529}=23$

Do $\Delta>0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$t_1=\frac{-3+23}{2.5}=2\text{ (nhận)};\ t_2=\frac{-3-23}{2.5}=\frac{-13}{5}\text{ (loại)}$$

Với $t_1=2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\{\sqrt{2};-\sqrt{2}\}$

b) Một hình chữ nhật có chu vi là 26m. Nếu tăng chiều dài thêm 2m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm 40 m². Tìm kích thước ban đầu của hình chữ nhật

Giải:

Gọi x, y (m) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật (y > x > 0)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2(x+y)=26\\(x+3)(y+2)=xy+40\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=13\\xy+2x+3y+6=xy+40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=13\\2x+3y=34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x-3y=-39\\2x+3y=34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x=-5\\2x+3y=34\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\10+3y=34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=8\end{cases}\text{ (nhận)}$$

Vậy hình chữ nhật có chiều rộng 5m, chiều dài 8m

Câu 2: Cho hàm số $y=ax^2$ (P)

a) Tìm a và vẽ (P), biết (P) đi qua điểm $A(-2;-2)$

Giải:

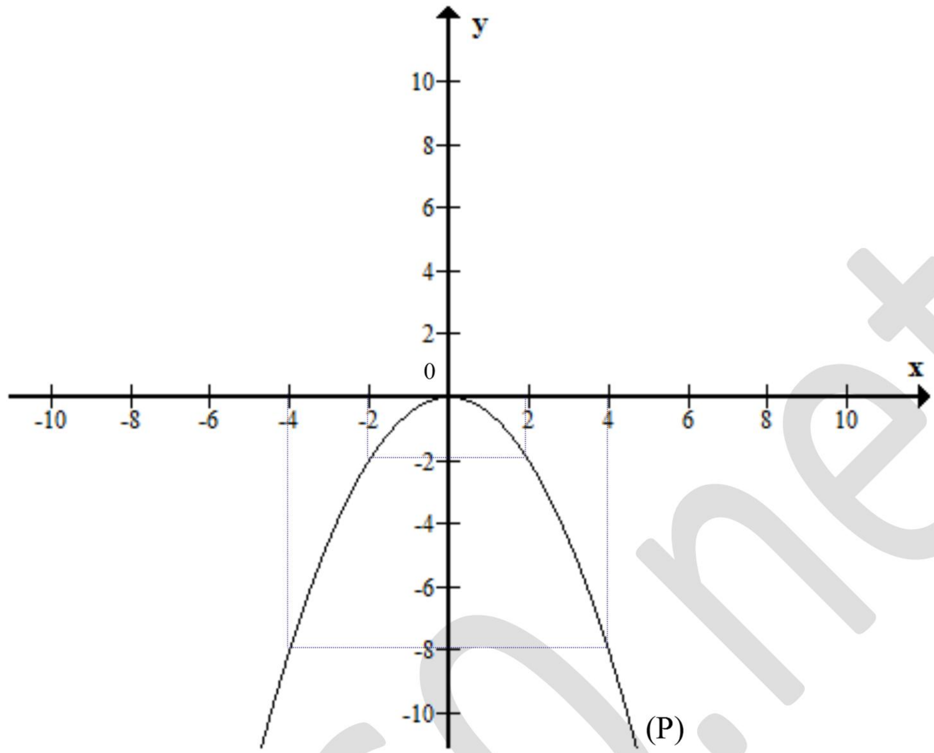
Ta có $A(-2;-2)\in(P): y=ax^2\Rightarrow -2=a.(-2)^2\Leftrightarrow -2=4a\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$

Vậy $(P): y=-\frac{1}{2}x^2$

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y=-\frac{1}{2}x^2$	-8	-2	0	-2	-8

Đồ thị



b) Trên (P) lấy điểm B có hoành độ là 3. Viết phương trình đường thẳng AB

Giải:

Gọi $B(x_0;y_0)$ là điểm cần tìm

Ta có B có hoành độ là 3 nên $x_0=3\Rightarrow B(3;y_0)$

Mà $B(3;y_0)\in(P): y=-\frac{1}{2}x^2\Rightarrow y_0=-\frac{1}{2}.3^2=-\frac{9}{2}\Rightarrow B\left(3;-\frac{9}{2}\right)$

Gọi phương trình đường thẳng AB là: $y=ax+b\,(a\neq 0)$

Ta có A, B thuộc AB nên có hệ phương trình: $\begin{cases}-2a+b=-2\\ 3a+b=-\frac{9}{2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+b=-2\\ 6a+2b=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a-2b=4\\ 6a+2b=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10a=-5\\ 6a+2b=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ -3+2b=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=-3\end{cases}\text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y=-\frac{1}{2}x-3$

Câu 3:

a) Thu gọn biểu thức: $A=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{10}{1+\sqrt{6}}$

Giải:

Ta có: $A=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{10}{1+\sqrt{6}}=\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}-\frac{10(\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)}$

$$= \frac{3\sqrt{6}+6+6+2\sqrt{6}}{3-2} - \frac{10\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1} = 5\sqrt{6}+12-2\left(\sqrt{6}-1\right) = 5\sqrt{6}+12-2\sqrt{6}+2 = 3\sqrt{6}+14$$

b) Bảng dưới đây mô tả số học sinh giỏi, khá, trung bình, yếu của từng khối của 1 trường THCS (không có học sinh kém). Nhìn vào bảng, em hãy trả lời các câu hỏi sau:

Khối / Xếp loại	Khối 6	Khối 7	Khối 8	Khối 9
Giỏi	409	300	385	350
Khá	578	417	608	623
Trung bình	153	215	217	255
Yếu	16	15	20	23

1) Số học sinh giỏi ở khối 6 nhiều hơn số học sinh giỏi ở khối 9 là bao nhiêu học sinh?

Giải:

Số học sinh giỏi ở khối 6 nhiều hơn số học sinh giỏi ở khối 9 là: 409 – 350 = 59 (học sinh)

2) Tỉ lệ số học sinh yếu ở khối nào là thấp nhất?

Giải:

Tỉ lệ học sinh yếu ở khối 6 là: $\frac{16.100\%}{409+578+153+16} \approx 1{,}38\%$

Tỉ lệ học sinh yếu ở khối 7 là: $\frac{15.100\%}{300+417+215+15} \approx 1{,}58\%$

Tỉ lệ học sinh yếu ở khối 8 là: $\frac{20.100\%}{385+608+217+20} \approx 1{,}63\%$

Tỉ lệ học sinh yếu ở khối 9 là: $\frac{23.100\%}{350+623+255+23} = 1{,}84\%$

Vậy tỉ lệ học sinh yếu ở khối 6 là thấp nhất: 1,38%

Câu 4: Cho phương trình: $x^2-(2m-1)x+m^2-1=0$ (với m là tham số)

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2

Giải:

Ta có $\Delta = [-(2m-1)]^2 - 4.1.(m^2-1) = 4m^2-4m+1-4m^2+4 = 5-4m$

Để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow 5-4m \ge 0 \Leftrightarrow -4m \ge -5 \Leftrightarrow m \le \frac{5}{4}$

Vậy $m \le \frac{5}{4}$ thì phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2

b) Tìm giá trị của m sao cho biểu thức $A = x_1(3-x_1)+x_2(3-x_2)$ đạt giá trị lớn nhất

Giải:

Theo câu a, với $m \le \frac{5}{4}$ thì phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-(2m-1)}{1} = 2m-1 \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m^2-1}{1} = m^2-1 \end{cases}$$

Ta có $A = x_1(3-x_1)+x_2(3-x_2) = 3x_1-x_1^2+3x_2-x_2^2 = 3(x_1+x_2)-(x_1^2+x_2^2)$

$$= 3(x_1+x_2)-\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]$$

$$= 3(2m-1)-\left[(2m-1)^2-2(m^2-1)\right] \text{ (do hệ thức Vi-ét)}$$

$$= 6m - 3 - (4m^2 - 4m + 1 - 2m^2 + 2) = 6m - 3 - 4m^2 + 4m - 1 + 2m^2 - 2$$

$$= -2m^2 + 10m - 6 = -2(m^2 - 5m + 3) = -2\left(m^2 - 2.m.\frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 3\right)$$

$$= -2\left[\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}\right] = -2\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{13}{2}$$

Ta có $m \le \frac{5}{4} \Leftrightarrow m - \frac{5}{2} \le \frac{5}{4} - \frac{5}{2} \Leftrightarrow m - \frac{5}{2} \le -\frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(m - \frac{5}{2}\right)^2 \ge \frac{25}{16} \Leftrightarrow -2\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 \le -2.\frac{25}{16}$

$$\Leftrightarrow -2\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 \le -\frac{25}{8} \Leftrightarrow -2\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{13}{2} \le -\frac{25}{8} + \frac{13}{2} = \frac{27}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{5}{4}$

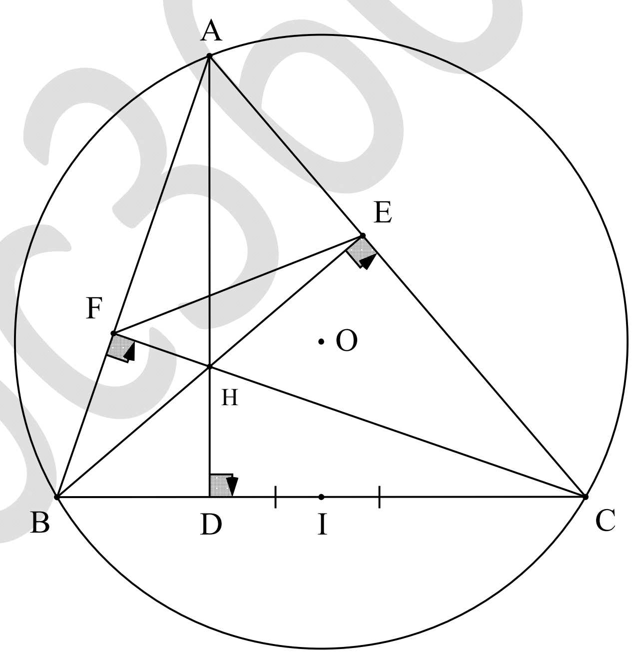
Giá trị lớn nhất của biểu thức A là: MaxA $= \frac{27}{8}$ khi và chỉ khi $m = \frac{5}{4}$

Vậy $m = \frac{5}{4}$ thì biểu thức A đạt giá trị lớn nhất

Câu 5: Cho ΔABC (AB < AC) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của BC

a) Chứng minh các tứ giác BFEC và AFHE nội tiếp

Giải:



Xét tứ giác BFEC có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$ (vì BE ⊥ AC, CF ⊥ AB)

⇒ Tứ giác BFEC nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh E, F liên tiếp cùng nhìn cạnh BC dưới 1 góc vuông)

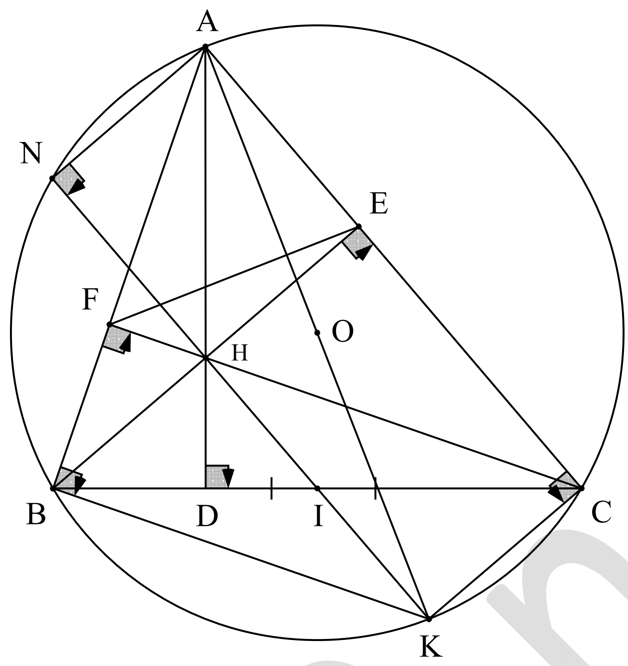
Xét tứ giác AFHE có:

$\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ (vì BE ⊥ AC, CF ⊥ AB)

⇒ Tứ giác AFHE nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

b) Tia IH cắt (O) tại N. Chứng minh ΔANH vuông tại N

Giải:



Kẻ đường kính AK của (O)

Ta có $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Xét tứ giác BHCK có:

BH // KC (cùng vuông góc với AC: quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song)

CH // KB (cùng vuông góc với AB: quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song)

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCK là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành)

Mà I là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ I là trung điểm của HK

$\Rightarrow$ H, I, K thẳng hàng

Ta có H, I, N thẳng hàng

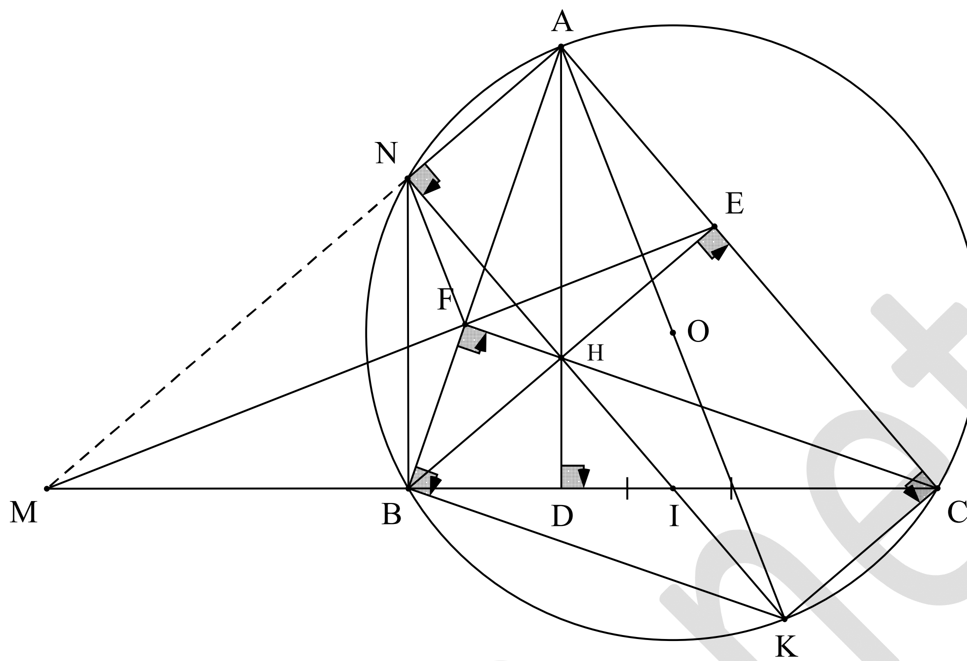
Vậy 4 điểm N, H, I, K thẳng hàng

Ta có $\widehat{ANH} = \widehat{ANK} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Vậy ΔANH vuông tại N

c) Tia EF cắt BC tại M. Chứng minh tứ giác NFBM nội tiếp

Giải:



Ta có $\widehat{ANH} = \widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^0$ (do trên)

$\Rightarrow$ 5 điểm A, N, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow$ Tứ giác ANFE nội tiếp đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow \widehat{NFM} = \widehat{NAE}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác ANFE nội tiếp)

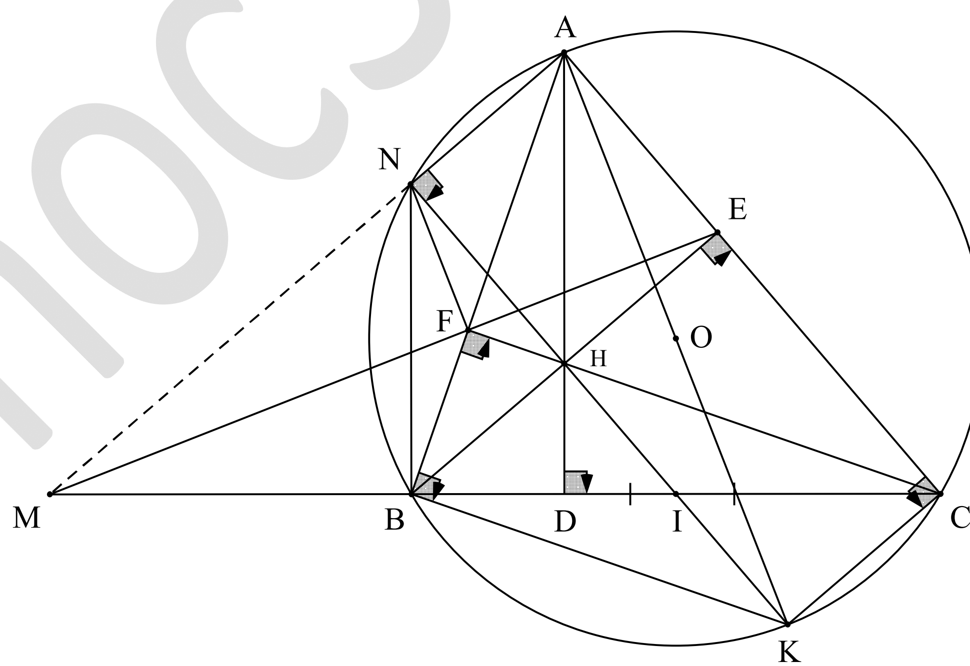
$= \widehat{NBM}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác ANBC nội tiếp đường tròn (O))

Xét tứ giác NFBM có: $\widehat{NFM} = \widehat{NBM}$ (do trên)

$\Rightarrow$ Tứ giác NFBM nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh F, B liên tiếp cùng nhìn cạnh NM dưới 1 góc bằng nhau)

d) Chứng minh ba điểm A, N, M thẳng hàng

Giải:



Ta có $\widehat{MNA} = \widehat{MNB} + \widehat{BNA}$

$= \widehat{MFB} + \widehat{BNA}$ (cùng chắn cung MB của tứ giác NFBM nội tiếp)

$= \widehat{BCA} + \widehat{BNA}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác EFBC nội tiếp)

$= 180^0$ (tổng 2 góc đối của tứ giác ANBC nội tiếp đường tròn (O))

Vậy ba điểm A, N, M thẳng hàng