BÀI GIẢI

Câu 1:

a) Giải phương trình: $\frac{x+1}{4}=2+\frac{1-2x}{5}$ (1)

Giải:

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{5(x+1)}{20}=\frac{40}{20}+\frac{4(1-2x)}{20}\\
&\Leftrightarrow 5(x+1)=40+4(1-2x)\\
&\Leftrightarrow 5x+5=40+4-8x\\
&\Leftrightarrow 5x+8x=40+4-5\\
&\Leftrightarrow 13x=39\\
&\Leftrightarrow x=3
\end{aligned}
$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\{3\}$

b) Lớp 9A có số học sinh nam bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh nữ và số nam ít hơn số nữ 6 học sinh. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh?

Giải:

Gọi x, y (học sinh) lần lượt là số học sinh nữ, nam của lớp 9A (x > 0; y > 0)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x \\ x-y=6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=0 \\ x-y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=0 \\ -4x+4y=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=-24 \\ x-y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \\ 24-y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \\ y=18 \end{cases} \text{(nhận)}$$

Vậy số học sinh lớp 9A là: x + y = 24 + 18 = 42 (học sinh)

Câu 2: Cho hàm số $(P): y=\frac{x^2}{2}$

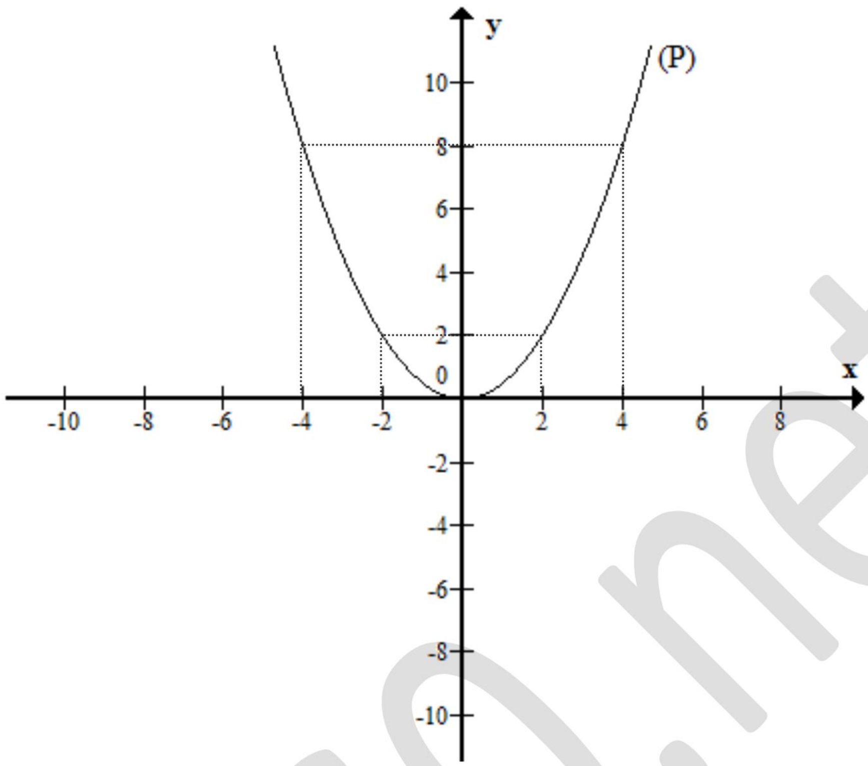
a) Vẽ đồ thị hàm số (P)

Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y=\frac{x^2}{2}$	8	2	0	2	8

Đồ thị



b) Cho điểm $A \in (P)$ có hoành độ bằng 2. Viết phương trình đường thẳng OA

Giải:

Gọi $A(x_0; y_0) \in (P)$

Theo đề bài, ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow A(2; y_0)$

Mà $A(2; y_0) \in (P): y = \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow y_0 = \dfrac{2^2}{2} = 2 \Rightarrow A(2;2)$

Gọi phương trình đường thẳng OA là: $y = ax + b\,(a \neq 0)$

Vì O, A thuộc OA nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 0.a + b = 0 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$ (thỏa)

Vậy phương trình đường thẳng OA là: $y = x$

Câu 3:

a) Thu gọn biểu thức sau: $A = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{7}{4+2\sqrt{2}}$

Giải:

Ta có: $A = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{7}{4+2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}.\sqrt{2}} - \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} - \dfrac{7(4-2\sqrt{2})}{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{2-1} - \dfrac{7(4-2\sqrt{2})}{16-8} = \dfrac{2\sqrt{2}}{8} - \dfrac{16(\sqrt{2}-1)}{8} - \dfrac{7(4-2\sqrt{2})}{8}$

$= \dfrac{2\sqrt{2} - 16\sqrt{2} + 16 - 28 + 14\sqrt{2}}{8} = \dfrac{-12}{8} = \dfrac{-3}{2}$

b) Một chiếc tivi được giảm giá 2 lần, mỗi lần giảm 10% giá đang bán thì giá còn lại là 16200000đ. Tính giá ban đầu của tivi đó

Giải:

Gọi x (đồng) là giá tiền ban đầu của tivi đó (x > 0)

Số tiền chiếc tivi được giảm 2 lần, mỗi lần giảm 10% giá đang bán là: $x(1-10\%)^2$ (đồng)

Theo đề bài, ta có phương trình: $x(1-10\%)^2 = 16200000$

$\Leftrightarrow x = 20000000$ (nhận)

Vậy giá ban đầu của tivi là: 20000000 (đồng)

Câu 4: Cho phương trình: $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ (a là tham số)

a) Tìm a để phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt

Giải:

Ta có $\Delta' = (-a)^2 - 1.(2a-1) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 1$

Vậy $a \neq 1$ thì phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt

b) Với giá trị nào của a thì phương trình có 2 nghiệm x_1 và x_2 để $M = \dfrac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ đạt GTLN

Giải:

Theo câu a, $\Delta' = (a-1)^2 \geq 0, \forall a$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-2a}{1} = 2a \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2a-1}{1} = 2a - 1 \end{cases}$$

Ta có $(x_1 - x_2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow \dfrac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 \Leftrightarrow A \leq 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2a \\ x_1^2 = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_1^2 = 2a - 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 2a - 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$

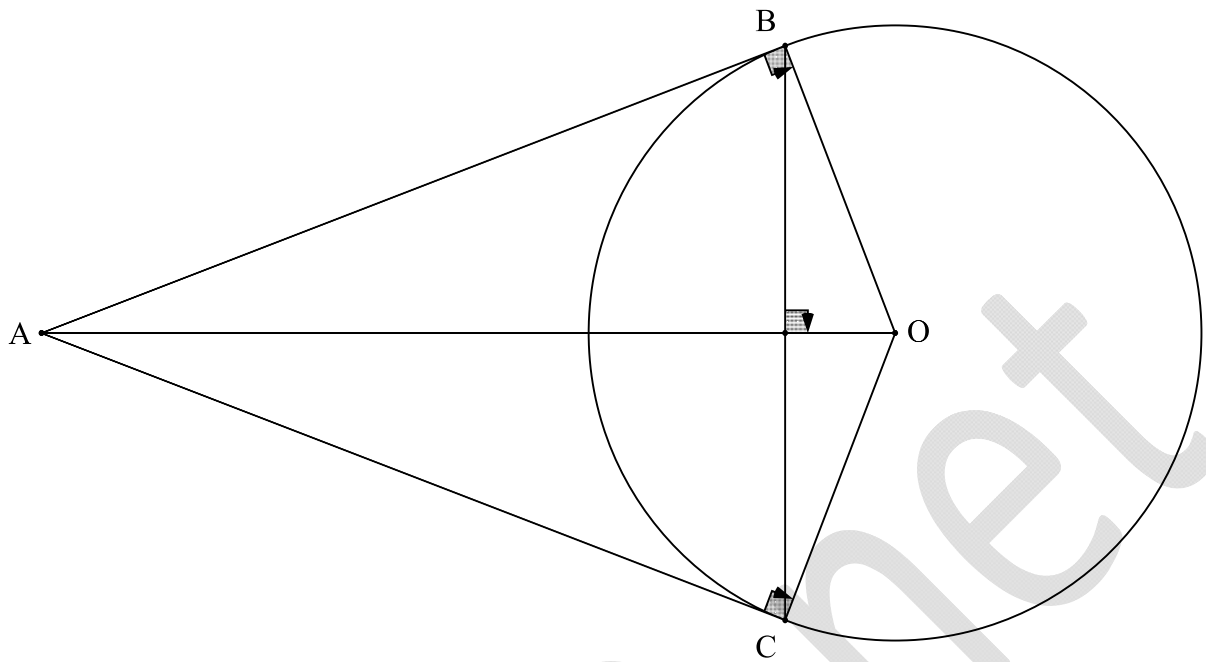
$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Vậy a = 1 là giá trị cần tìm

Câu 5: Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là 2 tiếp điểm)

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp và OA $\perp$ BC

Giải:



Xét tứ giác ABOC có:

$$A\hat{B}O + A\hat{C}O = 90^0 + 90^0 = 180^0$$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow$ Tứ giác ABOC nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

Ta có AB = AC (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

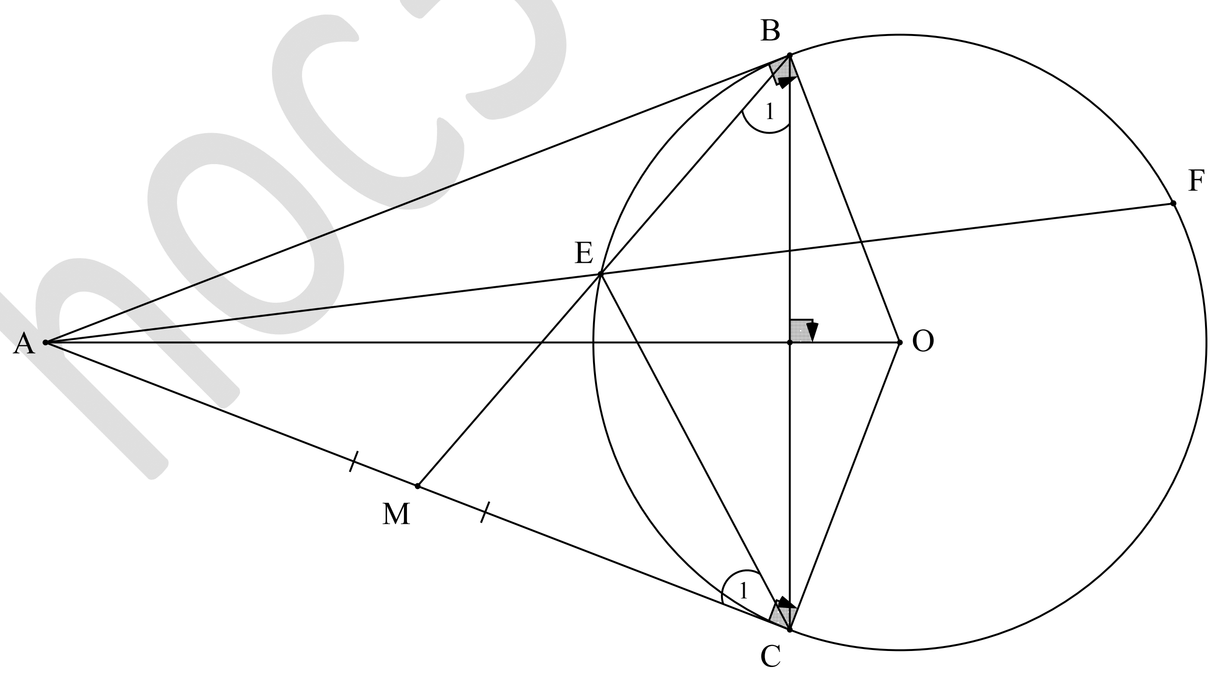
OB = OC (bán kính đường tròn (O))

$\Rightarrow$ AO là đường trung trực của đoạn thẳng BC

$\Rightarrow$ AO $\perp$ BC

b) Gọi M là trung điểm của AC, BM cắt (O) tại E, tia AE cắt (O) tại F. Chứng minh MC^2 = MB.ME

Giải:



Xét ΔMCE và ΔMBC có:

$E\hat{M}C$: chung

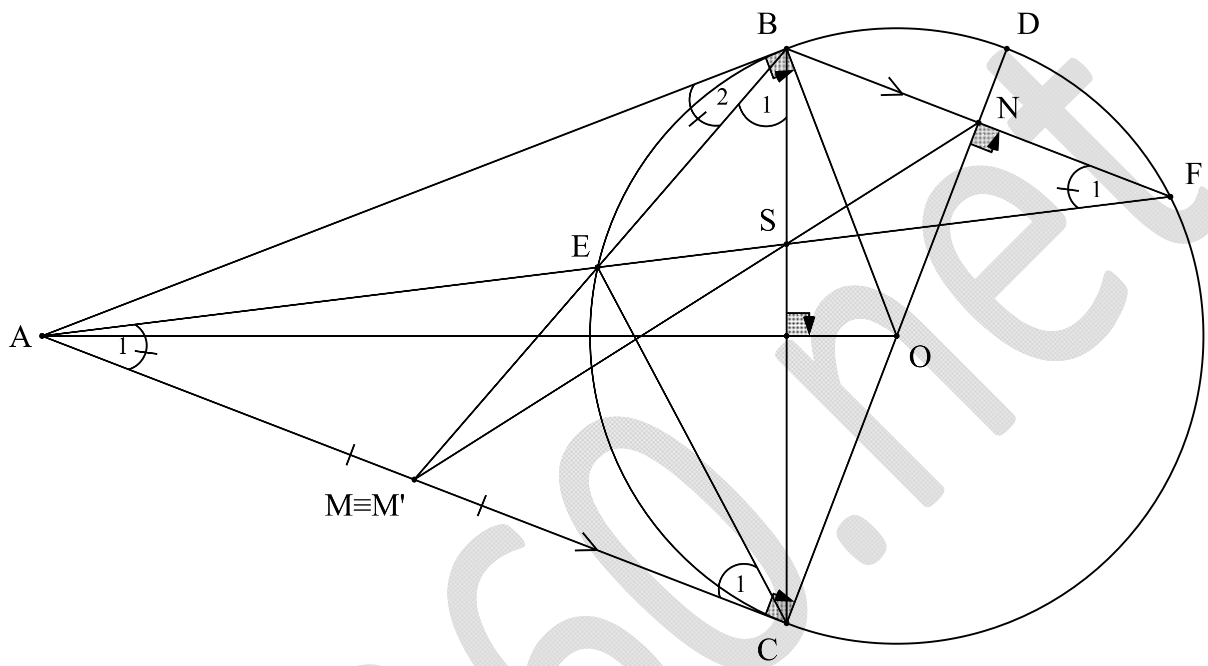
$\hat{C}_1 = \hat{B}_1$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta MCE \backsim \Delta MBC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MC}{MB} = \dfrac{ME}{MC} \Leftrightarrow MC^2 = MB.ME$

c) Tia CO cắt BF và (O) tại N và D. Chứng minh BC, MN, AF đồng quy

Giải:



Gọi S là giao điểm của BC và AF; M' là giao điểm của NS và AC

Xét ΔMAE và ΔMBA có:

$\widehat{AME}$: chung

$\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{ME}{MA}$ (vì MB.ME = MC² = MA²: do M là trung điểm của AC)

$\Rightarrow \Delta MAE \backsim \Delta MBA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_2$ (2 góc tương ứng)

$= \hat{F}_1$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow$ BF // AC (2 góc bằng nhau và ở vị trí so le trong: dấu hiệu nhận biết 2 đường thẳng song song)

Ta có CD $\perp$ AC (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow$ CD $\perp$ BF tại N (quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song)

$\Rightarrow$ N là trung điểm của BF (liên hệ giữa đường kính và dây cung)

Ta có NF // AM' và NB // CM' (vì BF // AC)

$\Rightarrow \dfrac{AM'}{FN} = \dfrac{SM'}{SN}$ và $\dfrac{CM'}{BN} = \dfrac{SM'}{SN}$ (hệ quả Talet)

$\Rightarrow \dfrac{CM'}{BN} = \dfrac{AM'}{FN} \Rightarrow CM' = AM'$ (vì N là trung điểm của BF nên BN = FN)

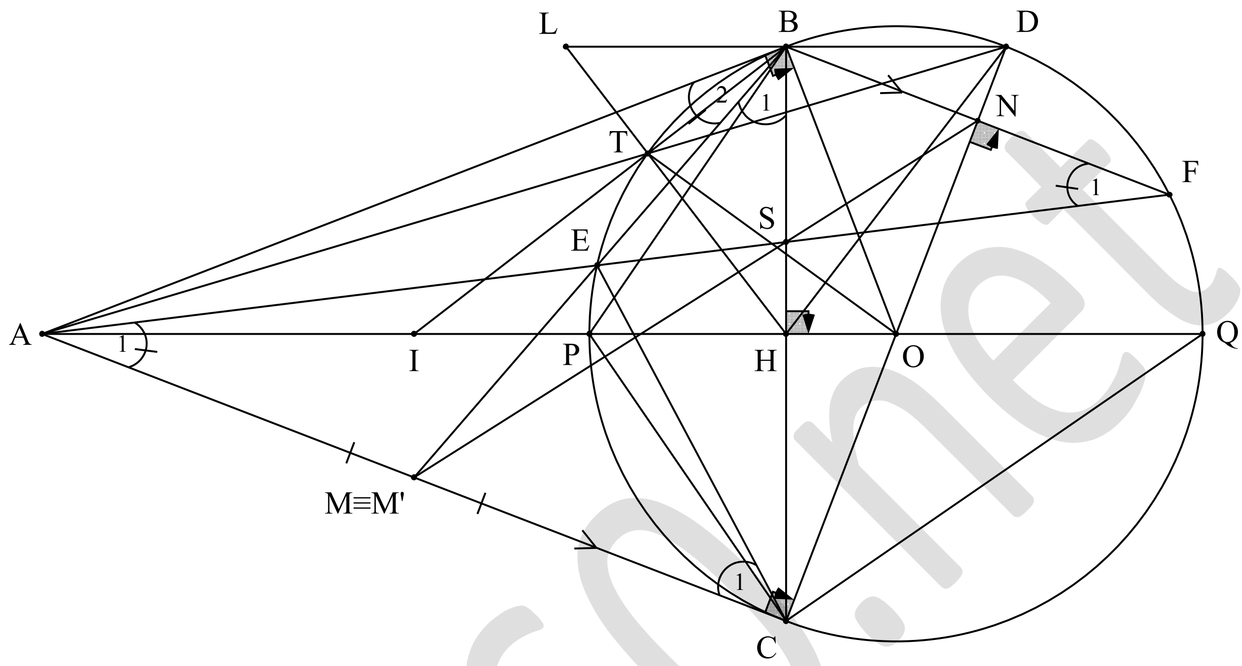
$\Rightarrow$ M' là trung điểm của AC

$\Rightarrow$ M' ≡ M

Vậy 3 đường thẳng BC, MN, AF đồng quy tại S

d) Tia AO cắt (O) tại P và Q, AD cắt (O) tại T, BT cắt AO tại I. Chứng minh: I là trung điểm của AH và $\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{1}{AI}$ (H là giao điểm của AO và BC)

Giải:



Gọi L là giao điểm của HT và DB

Xét ΔABT và ΔADB có:

$\widehat{BAT}$: chung

$\widehat{ABT}=\widehat{ADB}$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow$ ΔABT $\backsim$ ΔADB (g.g)

$\Rightarrow \frac{AT}{AB}=\frac{AB}{AD} \Leftrightarrow AT.AD=AB^2$ (1)

Ta có ΔABO vuông tại B và có BH là đường cao

$\Rightarrow AB^2 = AH.AO$ (2) (hệ thức lượng)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AT.AD = AH.AO (3)

Xét ΔAHT và ΔADO có:

$\widehat{TAH}$: chung

$\frac{AT}{AO}=\frac{AH}{AD}$ (do (3))

$\Rightarrow$ ΔAHT $\backsim$ ΔADO (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AHT}=\widehat{ADO}$ (4) (2 góc tương ứng)

Xét tứ giác ODTH có: $\widehat{AHT}=\widehat{ADO}$ (do (4))

$\Rightarrow$ Tứ giác ODTH nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

Ta có $\widehat{BHL}=90^0-\widehat{AHT}$ (2 góc phụ nhau)

$=90^0-\widehat{ODT}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác ODTH nội tiếp)

$=90^0-\widehat{OTD}$ (vì OD = OT = bán kính đường tròn (O) nên ΔODT cân tại O)

$=90^0-\widehat{OHD}$ (cùng chắn cung OD của tứ giác ODTH nội tiếp)

$=\widehat{BHD}$ (2 góc phụ nhau)

$\Rightarrow$ HB là phân giác của góc LHD

Ta có $\widehat{CBD}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow$ CB $\perp$ BD

Xét ΔHLD có: HB vừa là đường cao vừa là đường phân giác

$\Rightarrow$ ΔHLD cân tại H

$\Rightarrow$ HB cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow$ BD = BL (5)

Ta có LD // AH (cùng vuông góc với BC: quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song) hay BD // AI và BL // IH

$\Rightarrow \frac{AI}{BD}=\frac{IT}{BT}$ và $\frac{HI}{BL}=\frac{IT}{BT}$ (hệ quả Talet)

$\Rightarrow \frac{AI}{BD}=\frac{HI}{BL} \Leftrightarrow AI=HI$ (do (5))

$\Rightarrow$ I là trung điểm của AH

Ta có $\widehat{PCA}=\widehat{PBC}$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$=\widehat{PCB}$ (vì P thuộc đường trung trực AO của BC nên PB = PC $\Rightarrow$ ΔPBC cân tại P)

$\Rightarrow$ CP là phân giác trong $\widehat{ACH}$

$\Rightarrow \frac{PH}{PA}=\frac{CH}{CA}$ (6)

Ta có $\widehat{QCP}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow$ CQ là phân giác ngoài $\widehat{ACH}$

$\Rightarrow \frac{QH}{QA}=\frac{CH}{CA}$ (7)

Từ (6) và (7) $\Rightarrow \frac{PH}{PA}=\frac{QH}{QA} \Leftrightarrow \frac{AH-AP}{PA}=\frac{AQ-AH}{QA} \Leftrightarrow \frac{AH}{PA}-1=1-\frac{AH}{QA} \Leftrightarrow \frac{AH}{PA}+\frac{AH}{QA}=2$

$\Leftrightarrow AH\left(\frac{1}{PA}+\frac{1}{QA}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{1}{PA}+\frac{1}{QA}=\frac{2}{AH}=\frac{2}{2AI}=\frac{1}{AI}$ (vì I là trung điểm AH)

Vậy $\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{1}{AI}$