BÀI GIẢI

Câu 1:

a) Giải phương trình: $(x-3)^2+(x+4)^2=23-3x$ (1)

Giải:

$(1)\Leftrightarrow x^2-6x+9+x^2+8x+16-23+3x=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0$

Ta có $\Delta=5^2-4.2.2=25-16=9>0;\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Do $\Delta>0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-5+3}{2.2}=-\frac{1}{2};x_2=\frac{-5-3}{2.2}=-2$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\left\{-\frac{1}{2};-2\right\}$

b) Một khu vườn hình chữ nhật, có chiều dài hơn chiều rộng 8m và chu vi là 104m. Tính diện tích khu vườn

Giải:

Gọi x, y (m) lần lượt là chiều dài, chiều rộng của khu vườn hình chữ nhật (x > y > 0)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x-y=8\\2(x+y)=104\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=8\\x+y=52\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=60\\x+y=52\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=30\\30+y=52\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=30\\y=22\end{cases}\text{ (nhận)}$$

Diện tích của khu vườn là: $S=xy=30.22=660\left(m^2\right)$

Câu 2:

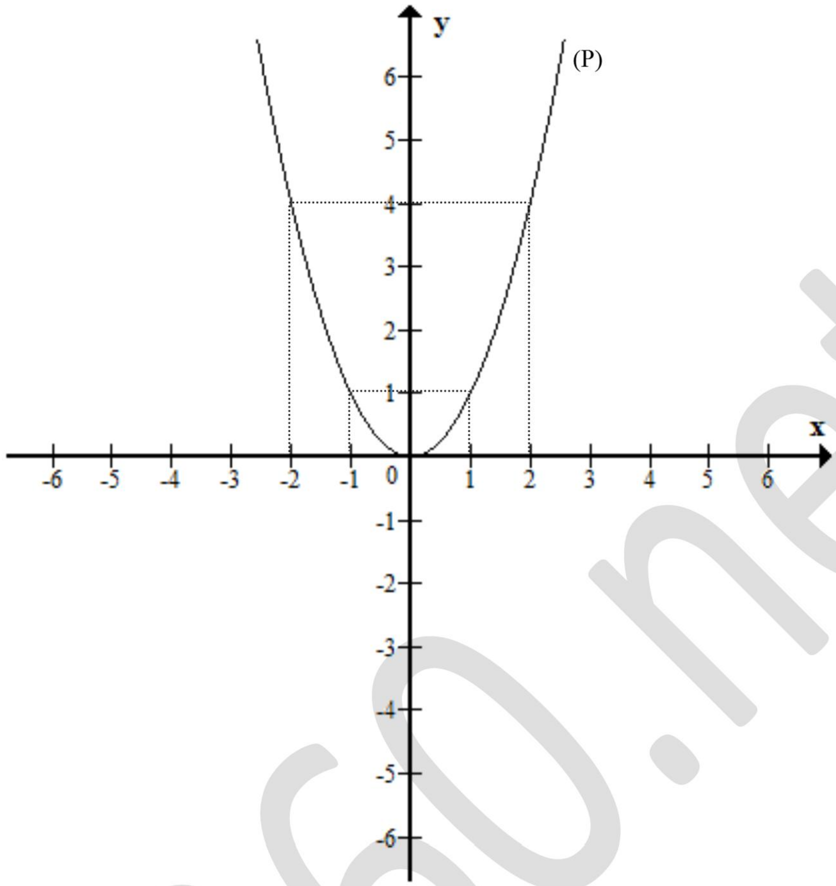
a) Vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{4}$ (P)

Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y=\frac{x^2}{4}$	4	1	0	1	4

Đồ thị



b) Trên (P) lấy điểm A có hoành độ bằng -2 và B có tung độ là $\frac{9}{4}$ (B có hoành độ dương). Viết phương trình đường thẳng AB

Giải:

Vì $A \in (P)$ ta có $x_A = -2 \Rightarrow y_A = \frac{x_A^2}{4} = \frac{(-2)^2}{4} = 1 \Rightarrow A(-2;1)$

Vì $B \in (P)$ ta có $y_B = \frac{9}{4} \Rightarrow y_B = \frac{x_B^2}{4} \Leftrightarrow x_B^2 = 4y_B = 4.\frac{9}{4} = 9 \Rightarrow x_B = 3$ (vì $x_B > 0$) $\Rightarrow B\left(3;\frac{9}{4}\right)$

Gọi đường thẳng AB có dạng: $y = ax + b\,(a \neq 0)$

Vì A, B thuộc AB nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} -2a + b = 1 \\ 3a + b = \frac{9}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ 3a + b = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = \frac{5}{4} \\ 3a + b = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} + b = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \text{(nhận)}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

Câu 3:

a) Thu gọn biểu thức: $A=\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}\right).\left(\sqrt{x}-\frac{9}{\sqrt{x}}\right)$ (với $x>0$ và $x\neq 9$)

Giải:

Ta có: $A=\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}\right).\left(\sqrt{x}-\frac{9}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)^2-\left(\sqrt{x}+3\right)^2}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}.\frac{x-9}{\sqrt{x}}$

$=\frac{x-6\sqrt{x}+9-x-6\sqrt{x}-9}{x-9}.\frac{x-9}{\sqrt{x}}=\frac{-12\sqrt{x}}{x-9}.\frac{x-9}{\sqrt{x}}=-12$

Vậy $A=-12$

b) Hưởng ứng phong trào "Tết trồng cây" tại một trường THCS, thầy tổng phụ trách ghi lại số cây hoa cúc trồng được như sau:

	Cúc trắng	Cúc vàng	Cúc hồng	Cúc đỏ	Cúc tím
Khối 6	35	30	28	30	30
Khối 7	35	28	30	30	35
Khối 8	35	50	35	50	30
Khối 9	35	35	30	30	50

Hỏi loại cúc nào trồng nhiều nhất? Tính tỉ lệ cúc vàng và cúc đỏ với số cây trồng được

Giải:

	Cúc trắng	Cúc vàng	Cúc hồng	Cúc đỏ	Cúc tím
Khối 6	35	30	28	30	30
Khối 7	35	28	30	30	35
Khối 8	35	50	35	50	30
Khối 9	35	35	30	30	50
Tổng	140	143	123	140	145

Loại hoa cúc tím trồng nhiều nhất

Tỉ lệ cúc vàng và đỏ là: $\frac{(143+140).100\%}{140+143+123+140+145}\approx 41\%$

Câu 4: Cho phương trình $x^2+(2m-1)x+m-2=0$

a) Chứng tỏ phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

Giải:

Ta có $\Delta=(2m-1)^2-4.1.(m-2)=4m^2-4m+1-4m+8=4m^2-8m+9=\left(4m^2-8m+4\right)+5$

$=(2m-2)^2+5\geq 5>0,\forall m$ (vì $(2m-2)^2\geq 0,\forall m$)

Do $\Delta>0,\forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 để $M=\frac{10}{(x_1-x_2)^2}$ đạt giá trị lớn nhất

Giải:

Theo câu a, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{2m-1}{1}=1-2m \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{m-2}{1}=m-2 \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có: $M=\dfrac{10}{(x_1-x_2)^2}=\dfrac{10}{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2}=\dfrac{10}{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-4x_1x_2}=\dfrac{10}{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\dfrac{10}{(1-2m)^2-4(m-2)}$ (do hệ thức Vi-ét)

$=\dfrac{10}{1-4m+4m^2-4m+8}=\dfrac{10}{4m^2-8m+9}=\dfrac{10}{(4m^2-8m+4)+5}=\dfrac{10}{(2m-2)^2+5}$

Ta có $(2m-2)^2\ge 0,\forall m \Leftrightarrow (2m-2)^2+5\ge 5,\forall m \Leftrightarrow \dfrac{1}{(2m-2)^2+5}\le\dfrac{1}{5},\forall m \Leftrightarrow \dfrac{10}{(2m-2)^2+5}\le 2,\forall m$

$\Leftrightarrow A\le 2,\forall m$

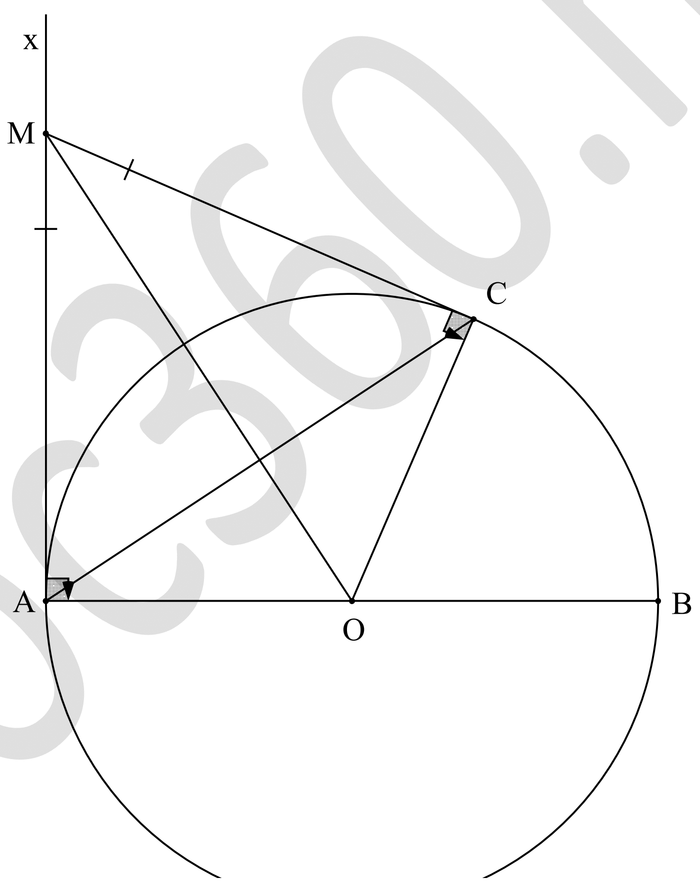
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2m-2=0\Leftrightarrow m=1$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là: MaxA = 2 khi và chỉ khi m = 1

Câu 5: Cho đường tròn (O) có đường kính AB và tiếp tuyến Ax. Lấy điểm M trên Ax và điểm C trên (O) sao cho MA = MC

a) Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O) và tứ giác OAMC nội tiếp được

Giải:



Xét ΔMCO và ΔMAO có:

MC = MA (gt)

MO: chung

OC = OA (bằng bán kính đường tròn (O))

$\Rightarrow$ ΔMCO ∽ ΔMAO (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{MCO}=\widehat{MAO}$ (2 góc tương ứng)

$=90^0$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow MC\perp OC$ tại C thuộc (O)

$\Rightarrow$ MC là tiếp tuyến của (O)

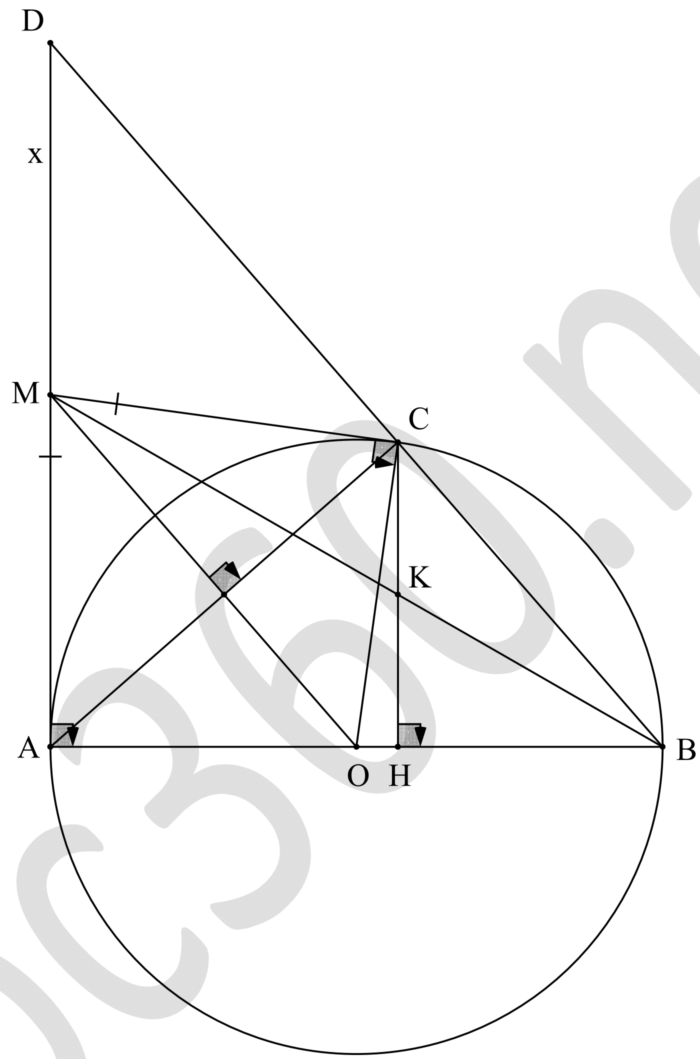
Xét tứ giác OAMC có:

$$M\hat{A}O + M\hat{C}O = 90^0 + 90^0 = 180^0$$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow$ Tứ giác OAMC nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

b) Tia BC cắt Ax tại D. Vẽ CH $\perp$ AB (H $\in$ AB). Tia CH cắt MB tại K. Chứng minh K là trung điểm của CH

Giải:



Ta có MA = MC (gt)

OA = OC (bán kính đường tròn (O))

$\Rightarrow$ MO là đường trung trực của đoạn thẳng AC

$\Rightarrow$ MO $\perp$ AC

Mà DB $\perp$ AC

$\Rightarrow$ MO // DB (quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song)

Xét ΔABD có: O là trung điểm của AB và MO // DB

$\Rightarrow$ M là trung điểm của AD

Ta có CH // DA (cùng vuông góc với AB: dấu hiệu nhận biết 2 đường thẳng song song)

$\Rightarrow$ KH // MA và KC // MD

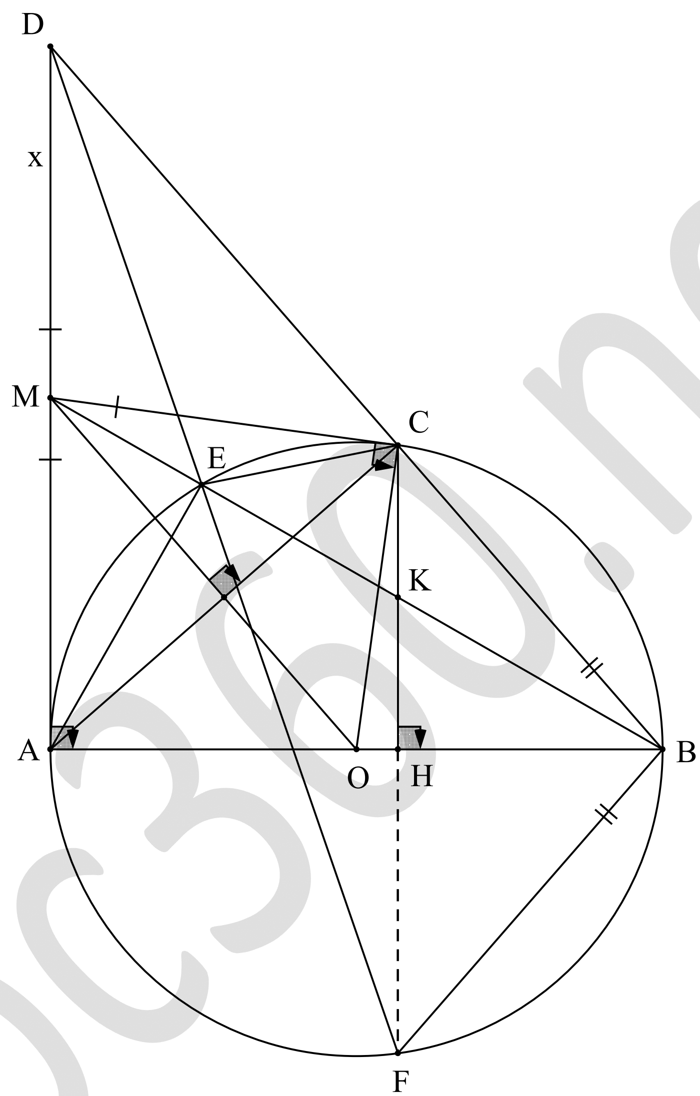
$$\Rightarrow \frac{KH}{MA} = \frac{BK}{BM} \text{ và } \frac{KC}{MD} = \frac{BK}{BM}$$

$\Rightarrow \dfrac{KH}{MA} = \dfrac{KC}{MD} \Leftrightarrow KH = KC$ (vì M là trung điểm AD nên MA = MD)

$\Rightarrow$ K là trug điểm của CH

c) BM cắt cung AC tại E và DE cắt (O) tại F. Chứng minh tứ giác DMEC nội tiếp và ba điểm C, H, F thẳng hàng

Giải:



Ta có $\widehat{CEB} = \widehat{CAB}$ (cùng chắn cung BC của đường tròn (O))

$= \widehat{ADB}$ (1) (cùng phụ góc DAC)

Xét tứ giác DMEC có: $\widehat{CEB} = \widehat{ADB}$ (do (1))

$\Rightarrow$ Tứ giác DMEC nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

Ta có $\widehat{BEF} = \widehat{MED}$ (2 góc đối đỉnh)

$= \widehat{MCD}$ (cùng chắn cung MD của tứ giác DMEC nội tiếp)

$= \widehat{MDC}$ (vì MC = MD nên ΔMCD cân tại M)

$= \widehat{ADB}$

$= \widehat{CEB}$ (do (1))

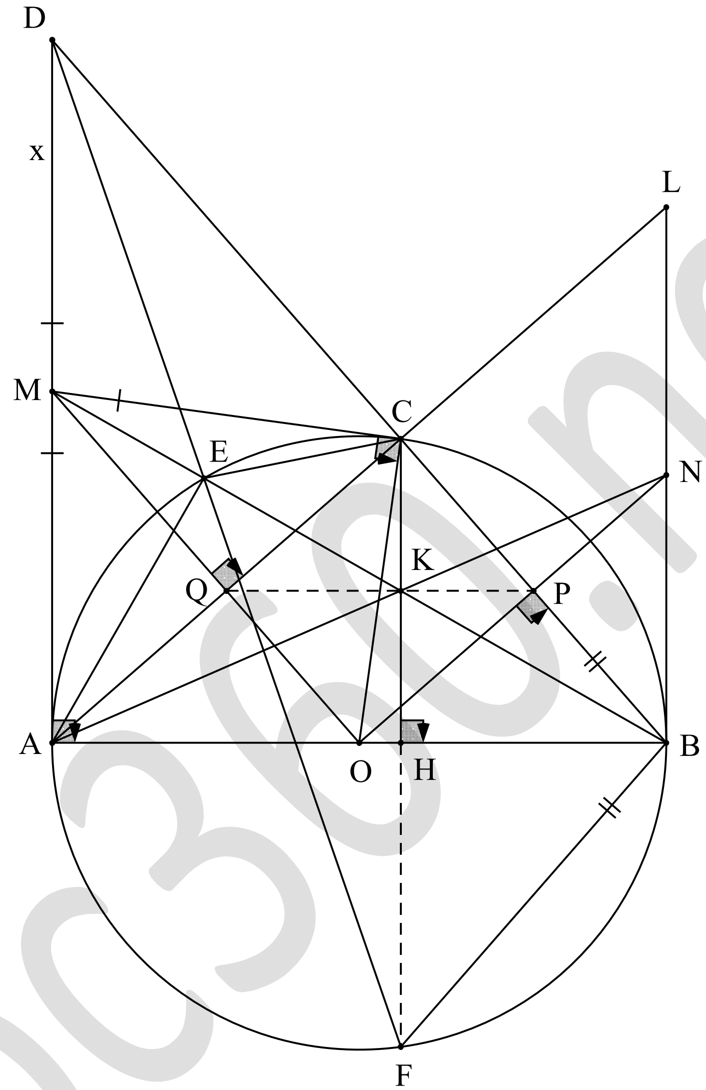
$\Rightarrow$ cung BC = cung BF (hệ quả góc nội tiếp)

$\Rightarrow$ BC = BF (liên hệ giữa cung và dây)

$\Rightarrow$ AB $\perp$ CF (liên hệ giữa đường kính và dây cung)
Mà CH $\perp$ AB (gt)
$\Rightarrow$ 3 điểm C, H, F thẳng hàng

d) Đường trung trực của BC và tia AK cắt nhau tại N. Chứng minh tam giác ANB vuông

Giải:



Gọi L là giao điểm của tia AC và tia BN
Gọi P, Q là giao điểm của ON và BC, OM và AC
Xét ΔCHB có: K là trung điểm của CH và P là trung điểm của BC
$\Rightarrow$ KP là đường trung bình của ΔCHB
$\Rightarrow$ KP // HB hay KP // AB (2)
Xét ΔCHA có: K là trung điểm của CH và Q là trung điểm của AC
$\Rightarrow$ KQ là đường trung bình của ΔCHA
$\Rightarrow$ KQ // HC hay KQ // AB (3)
Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ P, K, Q thẳng hàng
Ta có KP // AO $\Rightarrow \dfrac{NK}{NA} = \dfrac{NP}{NO}$ (4) (Talet)
Ta có NO // AL (cùng vuông góc với BC: dấu hiệu nhận biết 2 đường thẳng song song)

$\Rightarrow \dfrac{NP}{NO} = \dfrac{LC}{LA}$ (5) (Talet)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \dfrac{NK}{NA} = \dfrac{LC}{LA} \Rightarrow$ CK // LN (Talet đảo)

Mà CK $\perp$ AB $\Rightarrow$ LN $\perp$ AB (quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song)