

## BÀI GIẢI

### Câu 1:

a) Giải phương trình:  $(x^2 + 5)(x^2 - 2) = 4(x+1)(x-1)$  (1)

#### Giải:

$$(1) \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 5x^2 - 10 = 4(x^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 10 = 4x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 10 - 4x^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0$$

Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ )

Phương trình (1) trở thành:  $t^2 - t - 6 = 0$  (\*)

Ta có  $\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-6) = 1 + 24 = 25 > 0$ ;  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Do  $\Delta > 0$  nên phương trình (\*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$t_1 = \frac{1+5}{2.1} = 3 \text{ (nhận)}; t_2 = \frac{1-5}{2.1} = -2 \text{ (loại)}$$

Với  $t_1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là:  $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

b) Mẹ hơn Lan 24 tuổi, 2 năm nữa tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi Lan. Hỏi hiện giờ Lan bao nhiêu tuổi?

#### Giải:

Gọi  $x, y$  (tuổi) lần lượt là tuổi mẹ và Lan hiện giờ ( $y > x > 0$ )

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x - y = 24 \\ x + 2 = 3(y + 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 24 \\ x - 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 24 \\ -x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 24 \\ 2y = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 14 = 24 \\ y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 38 \\ y = 14 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy tuổi Lan hiện giờ là 14 (tuổi)

### Câu 2:

a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng tọa độ đồ thị (P):  $y = -x^2$  và (d):  $y = x - 2$

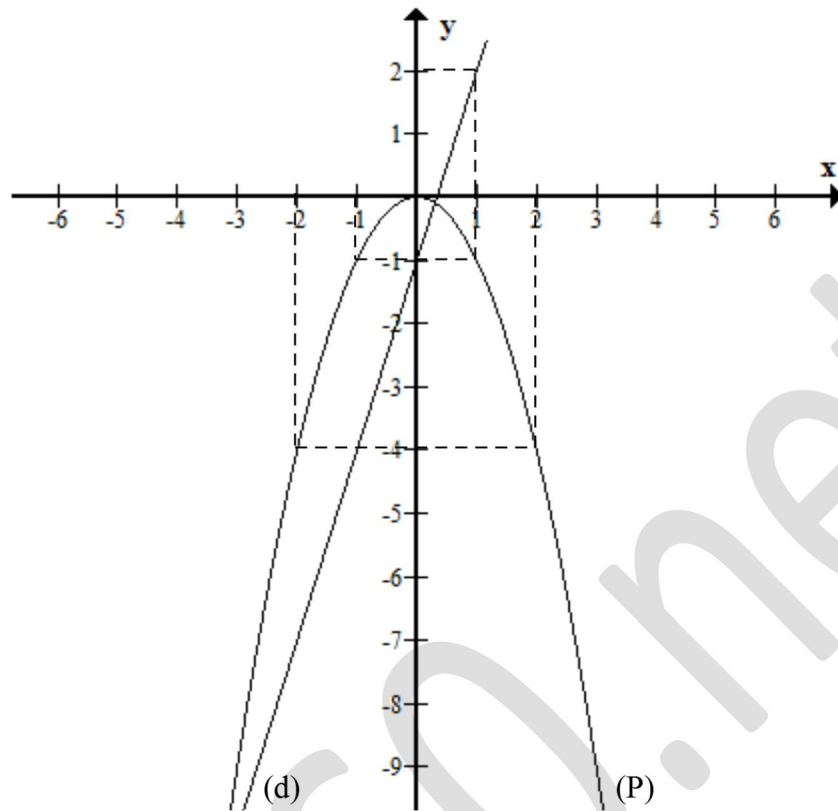
#### Giải:

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

x	0	1
$y = 3x - 1$	-1	2

Vẽ đồ thị



b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính

**Giải:**

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) có dạng:  $-x^2 = 3x - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 = 0 \quad (*)$$

Ta có  $\Delta = 3^2 - 4.1.(-1) = 9 + 4 = 13 > 0$ ;  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$

Do  $\Delta > 0$  nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2.1} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2.1} = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Với } x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \text{ ta có } y_1 = 3 \cdot \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} - 1 = \frac{-11 + 3\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Với } x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \text{ ta có } y_2 = 3 \cdot \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} - 1 = \frac{-11 - 3\sqrt{13}}{2}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là:  $A\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-11 + 3\sqrt{13}}{2}\right), B\left(\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-11 - 3\sqrt{13}}{2}\right)$

**Câu 3:**

a) Rút gọn biểu thức:  $A = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{200 - 106\sqrt{3}}{5 - 2\sqrt{3}}}}}$

**Giải:**

$$\text{Ta có: } A = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{200 - 106\sqrt{3}}{5 - 2\sqrt{3}}}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{(200 - 106\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3})}{(5 - 2\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3})}}} = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{1000 + 400\sqrt{3} - 530\sqrt{3} - 636}{25 - 12}}} \\
 &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{364 - 130\sqrt{3}}{13}}} = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}} = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{(5 - \sqrt{3})^2}}} \\
 &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5|5 - \sqrt{3}|}} = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})}} = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 25 - 5\sqrt{3}}} = \sqrt{4 + \sqrt{25}} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3
 \end{aligned}$$

Vậy  $A = 3$

- b) Quốc lộ 1A (viết tắt QL 1A) hay Đường 1 là tuyến đường giao thông xuyên suốt Việt Nam. Quốc lộ bắt đầu (km 0) tại cửa khẩu Hữu Nghị Quan trên biên giới giữa Việt Nam và Trung Quốc, nằm tại xã Bảo Lâm thuộc huyện Cao Lộc, tỉnh Lạng Sơn. Nó kết thúc tại Đất Mũi nằm trong địa phận huyện Ngọc Hiển, tỉnh Cà Mau với tổng chiều dài 2360km. Đây là tuyến đường quan trọng hàng đầu Việt Nam, nó đi qua trung tâm của một nửa số tỉnh thành Việt Nam, nối liền 4 thành phố lớn: Hà Nội, Đà Nẵng, Thành phố Hồ Chí Minh và Cần Thơ nên nó còn được gọi là quốc lộ xuyên Việt hay tuyến đường huyết mạch.

Một du khách quyết định trải nghiệm chuyến đi xuyên Việt trên ô tô từ km 0 ở Lạng Sơn đến mũi Cà Mau. Du khách dùng 5 lớp xe (4 lớp xe có sẵn trên xe và 1 lớp xe dự phòng) cho chuyến hành trình này và thay lớp xe để các lớp xe trải qua những quãng đường bằng nhau trong suốt chuyến du lịch. Hỏi mỗi lớp xe trải qua bao nhiêu km trong suốt chuyến du lịch của du khách?

**Giải:**

Gọi  $x$  (km) là số km mà mỗi lớp xe phải trải quãng đường 2360km ( $x > 0$ )

$\Rightarrow 5x$  (km) là tổng số km mà tất cả các lớp xe phải trải quãng đường 2360km

Theo đề bài, ta có phương trình:  $\frac{5x}{4} = 2360 \Leftrightarrow x = 1888$  (nhận)

Vậy mỗi lớp xe phải trải quãng đường dài 1888 (km)

**Câu 4:** Cho phương trình:  $x^2 + 2(m - 2)x - m^2 = 0$  ( $m$  là tham số)

- a) Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi  $m$

**Giải:**

$$\begin{aligned}
 \Delta' &= (m - 2)^2 - 1 \cdot (-m^2) = m^2 - 4m + 4 + m^2 = 2m^2 - 4m + 4 = 2(m^2 - 2m + 2) = 2((m^2 - 2m + 1) + 1) \\
 &= 2[(m - 1)^2 + 1] = 2(m - 1)^2 + 2 \geq 2 > 0, \forall m \text{ (vì } 2(m - 1)^2 \geq 0, \forall m)
 \end{aligned}$$

Do  $\Delta' \geq 0, \forall m$  nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi  $m$

- b) Tìm  $m$  để phương trình có 2 nghiệm  $x_1; x_2$  thỏa mãn  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 2$

**Giải:**

Theo câu a, với mọi  $m$  phương trình có 2 nghiệm  $x_1; x_2$  thỏa mãn hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2(m - 2)}{1} = 4 - 2m \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m^2}{1} = -m^2 \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có:  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 2$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 4 - 2m + 1 = -m^2(4 - 2m) + 2 \text{ (do hệ thức Vi-ét)}$$

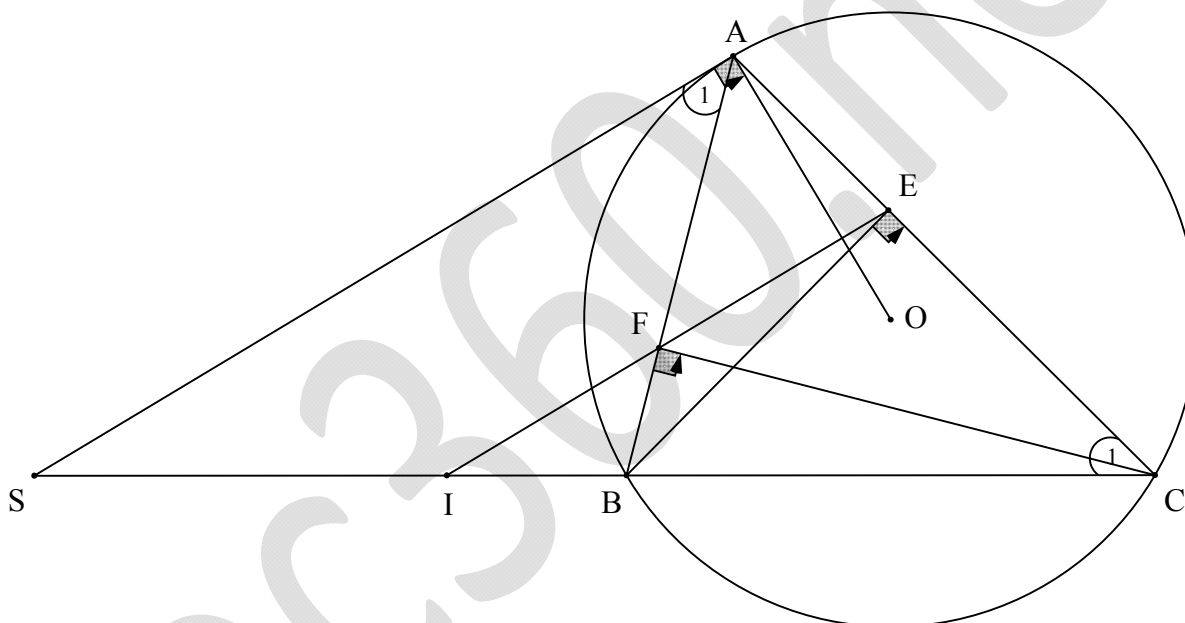
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -m^2 + 4 - 2m + 1 &= -4m^2 + 8m^3 + 2 \\ \Leftrightarrow 8m^3 - 3m^2 + 2m - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2m(m^2 + 1) - 3(m^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (m^2 + 1)(2m - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2m - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy  $m = \frac{3}{2}$  là giá trị cần tìm

**Câu 5:** Cho  $\Delta ABC$  ( $AB < AC$ ) có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Vẽ hai đường cao  $BE$  và  $CF$  của tam giác  $ABC$ . Tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $A$  cắt  $BC$  tại  $S$ ;  $EF$  cắt  $BC$  tại  $I$

a) Chứng minh tứ giác  $EFBC$  nội tiếp và  $SA^2 = SB \cdot SC$

**Giải:**



Xét tứ giác  $EFBC$  có:

$$\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ \text{ (vì } BE \perp AC, CF \perp AB)$$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $EFBC$  nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh  $E, F$  liên tiếp cùng nhìn cạnh  $BC$  dưới 1 góc vuông)

Xét  $\Delta SAB$  và  $\Delta SCA$  có:

$\widehat{ASB}$ : chung

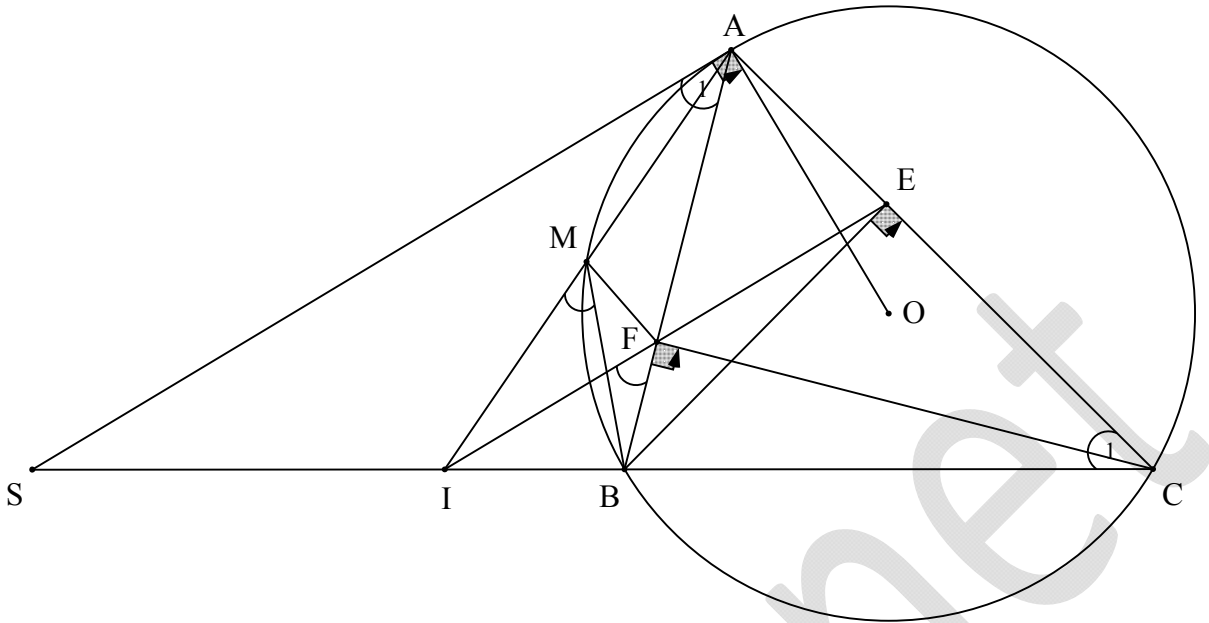
$$\widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)}$$

$\Rightarrow \Delta SAB \sim \Delta SCA$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SA} \Leftrightarrow SA^2 = SB \cdot SC$$

b)  $IA$  cắt  $(O)$  tại  $M$ . Chứng minh:  $IM \cdot IA = IB \cdot IC = IE \cdot IF$ , từ đó suy ra tứ giác  $AMFE$  nội tiếp

**Giải:**



Xét  $\Delta IMB$  và  $\Delta ICA$  có:

$\widehat{MIB}$ : chung

$\widehat{IMB} = \widehat{ICA}$  (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác AMBC nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta IMB \sim \Delta ICA$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IM}{IC} = \frac{IB}{IA} \Leftrightarrow IM \cdot IA = IB \cdot IC \quad (1)$$

Xét  $\Delta IFB$  và  $\Delta ICE$  có:

$\widehat{FIB}$ : chung

$\widehat{IFB} = \widehat{ICE}$  (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác EFBC nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta IFB \sim \Delta ICE$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IF}{IC} = \frac{IB}{IE} \Leftrightarrow IE \cdot IF = IB \cdot IC \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow IM \cdot IA = IB \cdot IC = IE \cdot IF$  (\*)

Xét  $\Delta IMF$  và  $\Delta IEA$  có:

$\widehat{MIF}$ : chung

$$\frac{IM}{IE} = \frac{IF}{IA} \quad (\text{do } (*))$$

$\Rightarrow \Delta IMF \sim \Delta IEA$  (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{IMF} = \widehat{IEA}$  (3) (2 góc tương ứng)

Xét tứ giác AMFE có:  $\widehat{IMF} = \widehat{IEA}$  (do (3))

$\Rightarrow$  Tứ giác AMFE nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

c) Chứng minh tứ giác IMFB nội tiếp

**Giải:**

Ta có  $\widehat{IMB} = \widehat{C}_1$  (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác AMBC nội tiếp)

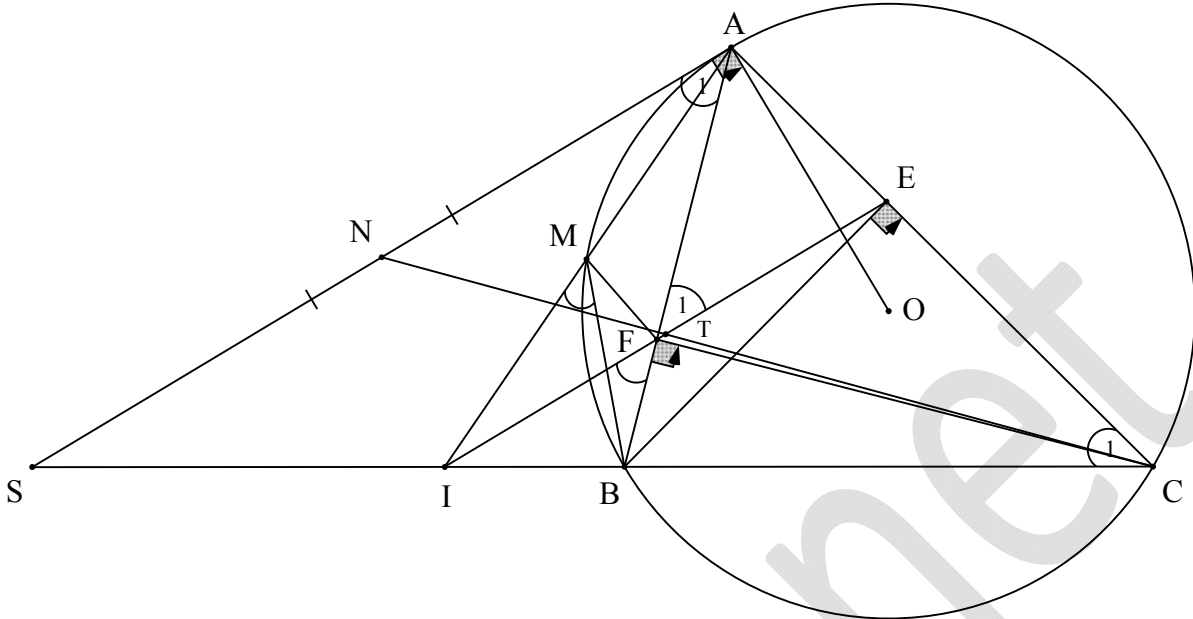
$= \widehat{IFB}$  (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác EFBC nội tiếp)

Xét tứ giác IMFB có:  $\widehat{IMB} = \widehat{IFB}$  (do trên)

$\Rightarrow$  Tứ giác IMFB nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh M, F liên tiếp cùng nhìn cạnh IB dưới 1 góc bằng nhau)

d) Gọi N là trung điểm SA. Chứng minh rằng NC đi qua trung điểm của EI

**Giải:**



Ta có  $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$  (do trên)

$= \hat{F}_1$  (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác EFBC nội tiếp)

$\Rightarrow SA \parallel IE$  (2 góc ở vị trí so le trong và bằng nhau: dấu hiệu nhận biết 2 đường thẳng song song)

Gọi T là giao điểm của CN và IE

Ta có  $SA \parallel IE$

$\Rightarrow IT \parallel SN$  và  $TE \parallel NA$

$\Rightarrow \frac{IT}{SN} = \frac{CT}{CN}$  và  $\frac{TE}{NA} = \frac{CT}{CN}$  (hệ quả Talet)

$\Rightarrow \frac{IT}{SN} = \frac{CT}{CN} \Leftrightarrow IT = CT$  (vì N là trung điểm của SA nên  $SN = CN$ )

$\Rightarrow T$  là trung điểm của IE

Vậy NC đi qua trung điểm T của EI