

## BÀI GIẢI

### Câu 1:

a) Giải phương trình:  $x(3 - 4x) = 1 - 2x^2$  (1)

**Giải:**

$$(1) \Leftrightarrow 3x - 4x^2 = 1 - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2x^2 - 3x + 4x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

Ta có  $a + b + c = 2 + (-3) + 1 = 0$  nên phương trình (1) có 2 nghiệm:

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là:  $S = \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$

b) Tính hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền đo được 185m. Biết rằng nếu giảm mỗi cạnh góc vuông 4m thì diện tích tam giác giảm đi 506m<sup>2</sup>

**Giải:**

Gọi  $x, y$  (m) lần lượt là 2 cạnh góc vuông ban đầu của tam giác vuông ( $x, y > 4$ )

Theo đề bài, ta có phương trình:  $x^2 + y^2 = 185^2 = 34225$  (\*)

Ta có:  $x - 4, y - 4$  (m) lần lượt là 2 cạnh góc vuông lúc sau của tam giác vuông

Theo đề bài, ta có phương trình:  $\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}(x - 4)(y - 4) = 506$

$$\Leftrightarrow xy - (x - 4)(y - 4) = 1012$$

$$\Leftrightarrow xy - (xy - 4x - 4y + 16) = 1012$$

$$\Leftrightarrow xy - xy + 4x + 4y - 16 - 1012 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y - 1028 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4y = 1028 - 4x$$

$$\Leftrightarrow y = 257 - x (**)$$

Thay (\*\*) vào (\*) ta được:  $x^2 + (257 - x)^2 = 34225$

$$\Leftrightarrow x^2 + 66049 - 514x + x^2 - 34225 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 514x + 31824 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 257x + 15912 = 0$$

Ta có  $\Delta = (-257)^2 - 4.1.15912 = 2401 > 0; \sqrt{\Delta} = \sqrt{2401} = 49$

Do  $\Delta > 0$  nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{257 + 49}{2.1} = 153; x_2 = \frac{257 - 49}{2.1} = 104$$

+ Với  $x_1 = 153 \Rightarrow y_1 = 257 - 153 = 104$

+ Với  $x_2 = 104 \Rightarrow y_2 = 257 - 104 = 153$

Vậy 2 cạnh góc vuông là 153 (m) và 104 (m)

### Câu 2:

a) Vẽ đồ thị (P):  $y = \frac{-1}{2}x^2$  và đồ thị (D):  $y = \frac{1}{2}x - 3$  trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy

**Giải:**

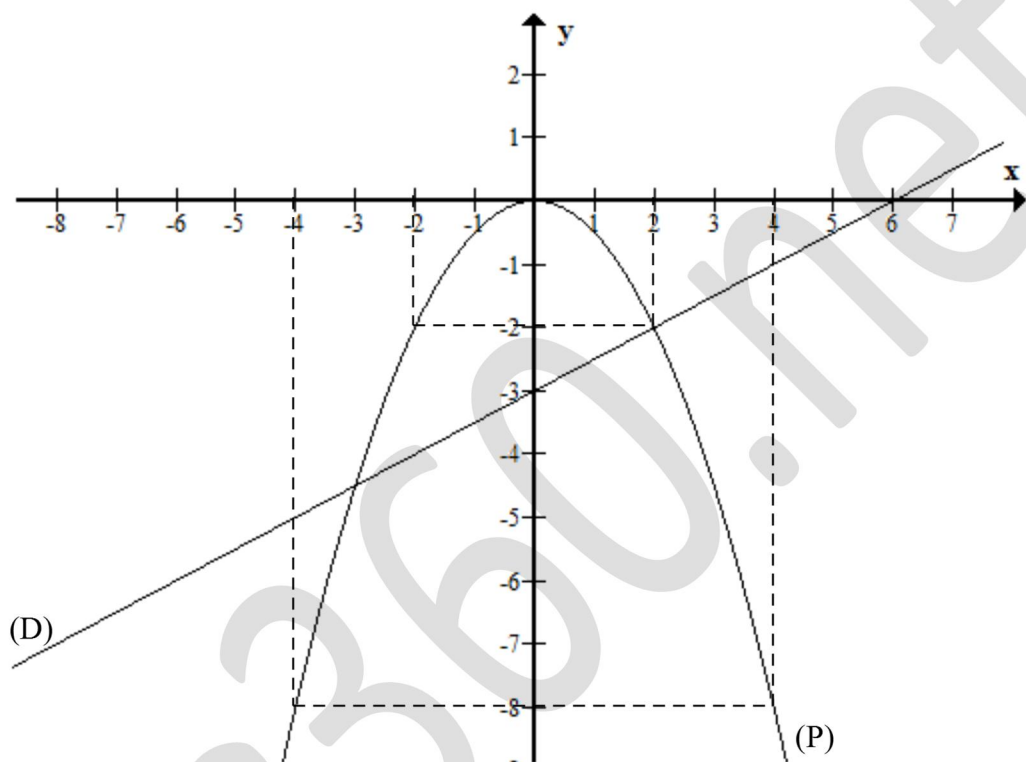
Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
---	----	----	---	---	---

$$y = \frac{-1}{2}x^2 \quad | \quad -8 \quad | \quad -2 \quad | \quad 0 \quad | \quad -2 \quad | \quad -8$$

$$\frac{x}{y = \frac{1}{2}x - 3} \quad | \quad 0 \quad | \quad 6$$
$$| \quad -3 \quad | \quad 0$$

Vẽ đồ thị



b) Tìm phương trình đường thẳng (d) song song (D) và đi qua  $A(-1;2)$

**Giải:**

Gọi phương trình đường thẳng (d) có dạng: (d):  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ )

$$\text{Ta có } (d) // (D) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b \neq -3 \end{cases} \Rightarrow (d): y = \frac{1}{2}x + b$$

$$\text{Ta có } A(-1;2) \in (d): y = \frac{1}{2}x + b \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \cdot (-1) + b \Leftrightarrow 2 = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) cần tìm là  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

**Câu 3:**

a) Rút gọn  $A = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}}$

**Giải:**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } A &= \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-|2\sqrt{3}+1|}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-(2\sqrt{3}+1)}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} \quad (\text{vì } 2\sqrt{3}+1 > 0) \\
 &= \frac{2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{3+|\sqrt{3}-1|}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{3}-1}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} \quad (\text{vì } \sqrt{3}-1 > 0) \\
 &= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{|\sqrt{3}+1|}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = 1 \quad (\text{vì } \sqrt{3}+1 > 0)
 \end{aligned}$$

- b) Trong một cuộc tranh giải cờ vua mỗi kì thủ giành được nửa số điểm của mình trong các trận đấu với các kì thủ xếp ở ba vị trí cuối bảng. Biết rằng thắng được 1 điểm, hòa được nửa điểm, thua 0 điểm. Hỏi có bao nhiêu kì thủ tham gia tranh giải?

**Giải:**

Gọi số người xếp trên 3 người cuối cùng là  $y$

⇒ Tổng số điểm của họ đấu với 3 người kia là  $3y$

⇒ Tổng số điểm họ đấu nội bộ là:  $\frac{y \cdot (y-1)}{2}$

Vì số điểm họ thu được khi đấu với 3 người bằng nửa số điểm của họ

⇒ Tổng số điểm họ có khi thi đấu với 3 người bằng số điểm của họ và nhỏ hơn tổng số điểm các trận đấu với 3 người

$$\Rightarrow 3y \geq \frac{y \cdot (y-1)}{2} \Leftrightarrow 6y \geq y^2 - y \Leftrightarrow y^2 - 7y \leq 0 \Leftrightarrow y(y-7) \leq 0 \Leftrightarrow y-7 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 7 \quad (1)$$

Số điểm trung bình của  $y$  người xếp trên là:  $\frac{2 \cdot y \cdot (y-1)}{2y} = y-1$

Số này phải lớn hơn số điểm trung bình của 3 người xếp dưới là:  $1 + \frac{3 \cdot y - \frac{y \cdot (y-1)}{2}}{3}$

$$\Rightarrow y-1 > 1 + \frac{6y - y \cdot (y-1)}{6} \Leftrightarrow 6y-6 > 6+6y-y^2+y \Leftrightarrow y^2-y-12 > 0 \Leftrightarrow (y+3)(y-4) > 0$$

$$\Leftrightarrow y-4 > 0 \Leftrightarrow y > 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có  $4 < y \leq 7 \Rightarrow y = 5, 6, 7$

Vậy số người có thể là 8, 9, 10

**Câu 4:** Cho phương trình:  $x^2 - 2mx + 2m^2 - 1 = 0$  (1) ( $m$ : tham số,  $x$ : ẩn số)

- a) Tìm  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

**Giải:**

$$\text{Ta có } \Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (2m^2 - 1) = m^2 - 2m^2 + 1 = 1 - m^2$$

$$\text{Để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ -\frac{2m}{1} > 0 \\ \frac{2m^2 - 1}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < 1 \\ m > 0 \\ m^2 > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m > 0 \\ m < -\frac{\sqrt{2}}{2}; m > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$$

Vậy  $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$  là giá trị cần tìm

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt  $x_1; x_2$  thỏa mãn hệ thức  $x_1^3 - x_1^2 + x_2^3 - x_2^2 = -2$

**Giải:**

Theo câu a,  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 1$  thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt  $x_1; x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2m}{1} = 2m \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2m^2 - 1}{1} = 2m^2 - 1 \end{cases}$$

Ta có:  $x_1^3 - x_1^2 + x_2^3 - x_2^2 = -2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x_1^3 + x_2^3) - (x_1^2 + x_2^2) + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2m[(2m)^2 - 3(2m^2 - 1)] - [(2m)^2 - 2(2m^2 - 1)] + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2m(4m^2 - 6m^2 + 3) - (4m^2 - 4m^2 + 2) + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2m(-2m^2 + 3) - 2 + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2m(-2m^2 + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 0 \\ -2m^2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

So với điều kiện  $-1 < m < 1$  ta thấy  $m = 0$  (thỏa)

Vậy  $m = 0$  là giá trị cần tìm

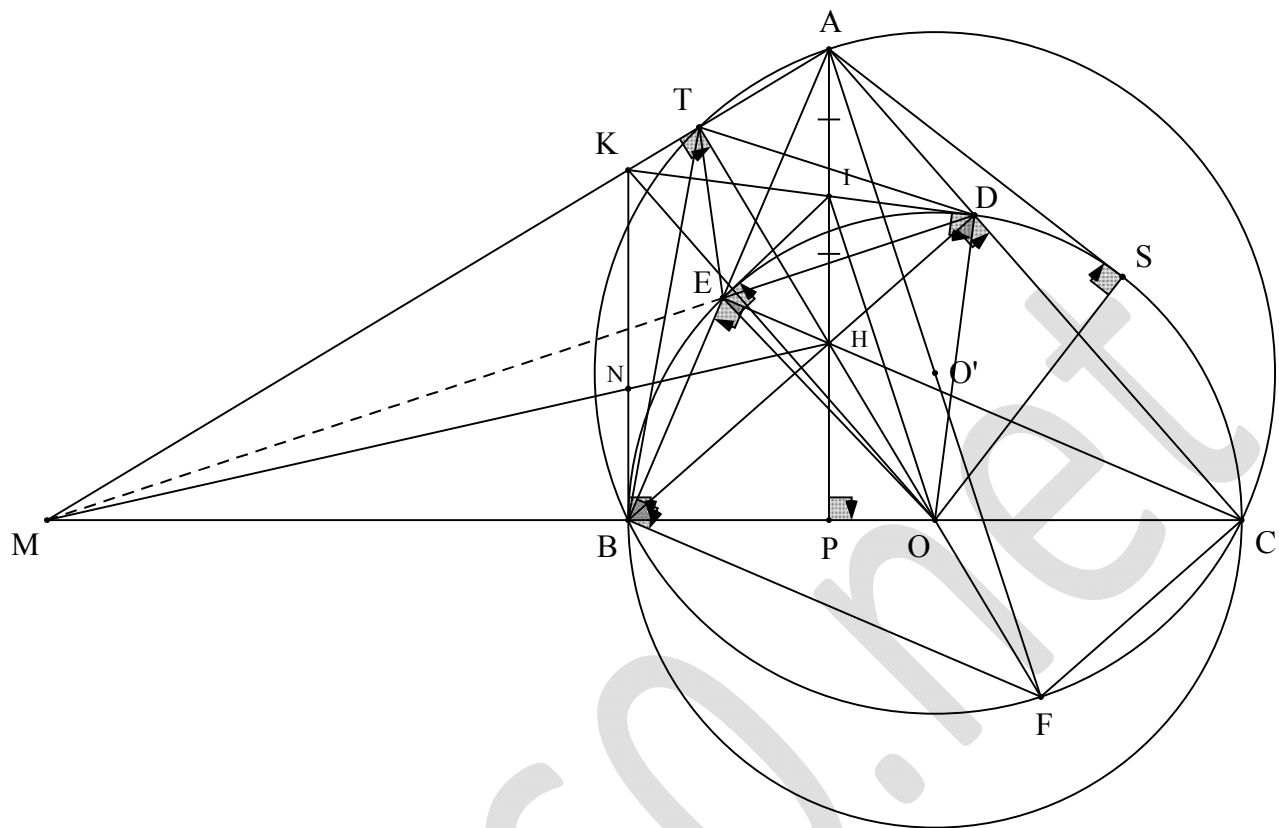
**Câu 5:** Cho  $\Delta ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ). Đường tròn tâm O đường kính BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại E, D. BD cắt CE tại H. Các tiếp tuyến tại B, D của (O) cắt nhau tại K; AK cắt BC tại M; MH cắt BK tại N. Vẽ tiếp tuyến AS đến đường tròn (O) (S thuộc cung nhỏ CD). DK cắt AH tại I. Chứng minh rằng:

a) I là trung điểm của AH và IE là tiếp tuyến của (O)

**Giải:**







Ta có  $\widehat{ABF} = \widehat{ACF} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn  $(O')$ )

Xét tứ giác BHCF có:

$BH \parallel FC$  (cùng vuông góc với AC: dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

$CH \parallel FB$  (cùng vuông góc với AB: dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

$\Rightarrow$  Tứ giác BHCF là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành)

Mà O là trung điểm của BC (vì BC là đường kính của đường tròn  $(O)$ )

$\Rightarrow$  O là trung điểm của FH

$\Rightarrow$  3 điểm F, O, H thẳng hàng (9)

Ta có  $\widehat{OTK} = \widehat{ODK} = 90^\circ$  (cùng chắn cung OK của đường tròn  $(KBD)$ )

$\Rightarrow OT \perp MA$  (10)

Ta có  $\widehat{FTA} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn  $(O')$ )

$\Rightarrow FT \perp MA$  (11)

Từ (10) và (11)  $\Rightarrow$  3 điểm F, O, T thẳng hàng (12)

Từ (9) và (12)  $\Rightarrow$  4 điểm F, O, H, T thẳng hàng

Ta có  $\widehat{ATH} = \widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$

$\Rightarrow$  5 điểm A, T, E, H, D cùng thuộc đường tròn đường kính đường kính AH

Ta có  $\widehat{TMB} = 90^\circ - \widehat{TÂH}$  (2 góc phụ nhau)

$= \widehat{T\hat{H}A}$  (2 góc phụ nhau)

$= \widehat{T\hat{E}A}$  (13) (cùng chắn cung AT của đường tròn đường kính AH)

Xét tứ giác TEBM có:  $\widehat{TMB} = \widehat{T\hat{E}A}$  (do (13))

$\Rightarrow$  Tứ giác TEBM nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

$\Rightarrow \widehat{M\hat{E}B} = \widehat{M\hat{T}B}$  (cùng chắn cung MB của tứ giác TEBM nội tiếp)

d) Chứng minh: M, H, S thẳng hàng

**Giải:**





$\Rightarrow \widehat{OLS} = \widehat{OSA}$  (2 góc tương ứng)

Ta có  $\widehat{MLS} = \widehat{MLO} + \widehat{OLS} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$  3 điểm M, L, S thẳng hàng

**Bài toán cực hay!**