BÀI GIẢI

Câu 1:

a) Giải phương trình: $\left(\sqrt{3}-1\right)x^2+\left(\sqrt{3}-2\right)x+3-2\sqrt{3}=0$ (1)

Giải:

Ta có $a+b+c=\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}-2\right)+\left(3-2\sqrt{3}\right)=0$ nên phương trình có 2 nghiệm:

$$x_1=1;x_2=\frac{c}{a}=\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(3-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{3\sqrt{3}+3-6-2\sqrt{3}}{3-1}=\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\left\{1;\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right\}$

b) Một giáo viên mua viết xanh và viết đỏ làm phần thưởng tặng học sinh làm kiểm tra đạt điểm tốt. Viết xanh giá 2,000đ/cây, viết đỏ loại tốt giá 4,000đ/cây. Biết tổng số viết xanh và viết đỏ là 40 cây và giáo viên đã bỏ ra số tiền là 100,000đ để mua viết. Hỏi giáo viên đã mua bao nhiêu cây viết xanh, viết đỏ?

Giải:

Gọi x, y (cây) lần lượt là số cây viết xanh, viết đỏ giáo viên mua tặng học sinh (x > 0; y > 0)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=40\\2000x+4000y=100000\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=40\\x+2y=50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=40\\-x-2y=-50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=40\\-y=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+10=40\\y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=30\\y=10\end{cases}\text{ (thỏa)}$$

Vậy giáo viên mua 30 cây viết xanh và 10 cây viết đỏ

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+3$

a) Tìm m biết (P) và (d) cùng đi qua điểm A có hoành độ là -1. Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ với m vừa tìm được

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) có dạng: $x^2=mx+3$ (*)

Do (P) và (d) cùng đi qua điểm A có hoành độ là -1 nên $x=-1$ là nghiệm của phương trình (*)

$\Rightarrow 1^2=m.1+3\Leftrightarrow 1=m+3\Leftrightarrow m=-2$

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm

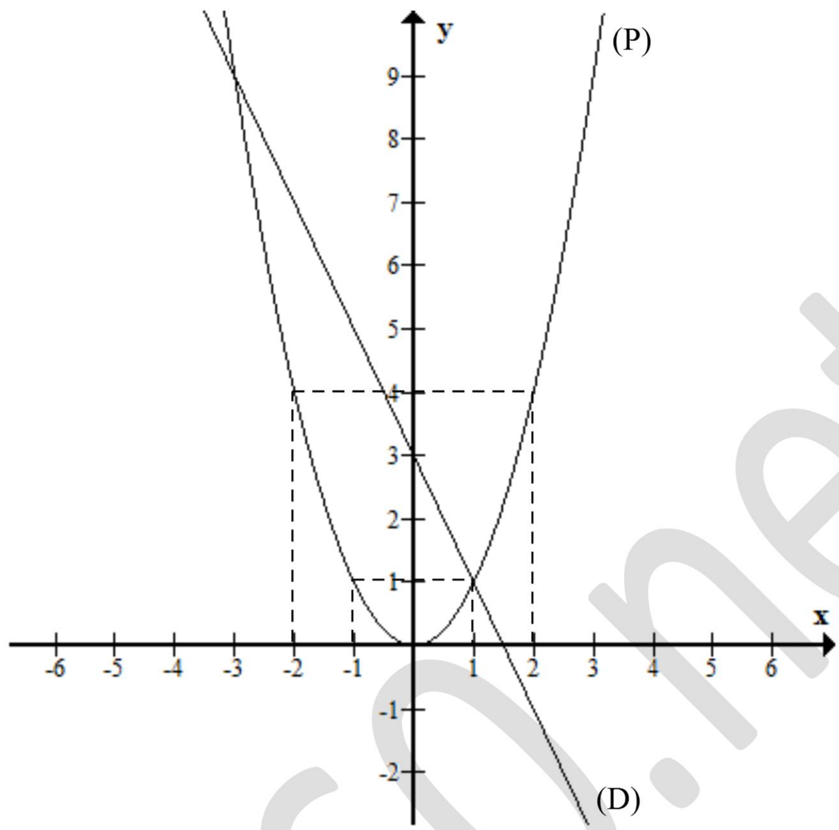
Với $m=-2$ ta có $(d): y=-2x+3$

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y=x^2$	4	1	0	1	4

x	0	1
$y=-2x+3$	3	1

Vẽ đồ thị



b) Gọi C là giao điểm của (P) và (d) có hoành độ dương. Cho biết điểm $E(1;-3)$. Hỏi đường thẳng CE có mấy điểm chung với (P)? Vì sao?

Giải:

Với $m=-2$ ta có $(*) \Leftrightarrow x^2=-2x+3 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0$

Ta có $a+b+c=1+2+(-3)=0$ nên phương trình có 2 nghiệm:

$$x_1=1; x_2=\frac{c}{a}=\frac{-3}{1}=-3$$

Do hoành độ của điểm C và E là 1 nên đường thẳng CE chỉ có 1 điểm chung với (P) là điểm đó chính là điểm C

Câu 3:

a) Thu gọn biểu thức: $\dfrac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{1-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

Giải:

Ta có: $\dfrac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{1-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{1-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}$

$$=\frac{3-\sqrt{5}}{1+\left|\sqrt{5}+1\right|}+\frac{3+\sqrt{5}}{1-\left|\sqrt{5}-1\right|}=\frac{3-\sqrt{5}}{1+(\sqrt{5}+1)}+\frac{3+\sqrt{5}}{1-(\sqrt{5}-1)}=\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}+\frac{3+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(3-\sqrt{5})(2-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=\frac{6-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+5+6+3\sqrt{5}+2\sqrt{5}+5}{4-5}$$

$$=\frac{22}{-1}=-22$$

b) Bạn Nghĩa làm việc tại nhà hàng nọ, bạn ấy được trả 2 triệu đồng cho 40 giờ làm việc tại quán trong một tuần. Mỗi giờ làm thêm trong tuần bạn được trả bằng $1\frac{1}{2}$ số tiền mà mỗi giờ bạn ấy kiếm được trong 40 giờ đầu. Nếu trong tuần đó bạn nghĩa được trả 2,3 triệu đồng thì bạn ấy đã phải làm thêm bao nhiêu giờ?

Giải:

Gọi x (giờ) là thời gian bạn Nghĩa làm thêm (x > 0)

Ta có 40 giờ đầu làm việc trong 1 tuần được 2 triệu đồng

$\Rightarrow$ 1 giờ làm việc trong 40 giờ đầu với số tiền là: $\frac{1.2000000}{40}=50000$ (đồng)

$\Rightarrow$ 1 giờ làm thêm với số tiền là: $1\frac{1}{2}.50000=\frac{3}{2}.50000=75000$ (đồng)

Số tiền bạn Nghĩa làm thêm kiếm được là: 2300000 – 2000000 = 300000 (đồng)

Theo đề bài, ta có phương trình: $x.75000=300000 \Leftrightarrow x=4$ (nhận)

Vậy bạn Nghĩa đã làm thêm 4 giờ trong 1 tuần

Câu 4: Cho phương trình $x^2-2(m^3-m)x-4m^4-1=0$ (x là ẩn số) (1)

a) Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt

Giải:

Ta có $\Delta'=[-(m^3-m)]^2-1.(-4m^4-1)=m^6-2m^4+m^2+4m^4+1=m^6+2m^4+m^2+1$

$=(m^6+2m^4+m^2)+1=(m^3+m)^2+1\geq 1>0,\forall m$ (vì $(m^3+m)^2\geq 0,\forall m$)

Do $\Delta'>0,\forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

b) Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1). Tìm m để 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $(x_1-x_2)^4=16$

Giải:

Theo câu a, $\Delta'>0,\forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-2(m^3-m)}{1}=2m^3-2m \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4m^4-1}{1}=-4m^4-1 \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có: $(x_1-x_2)^4=16$

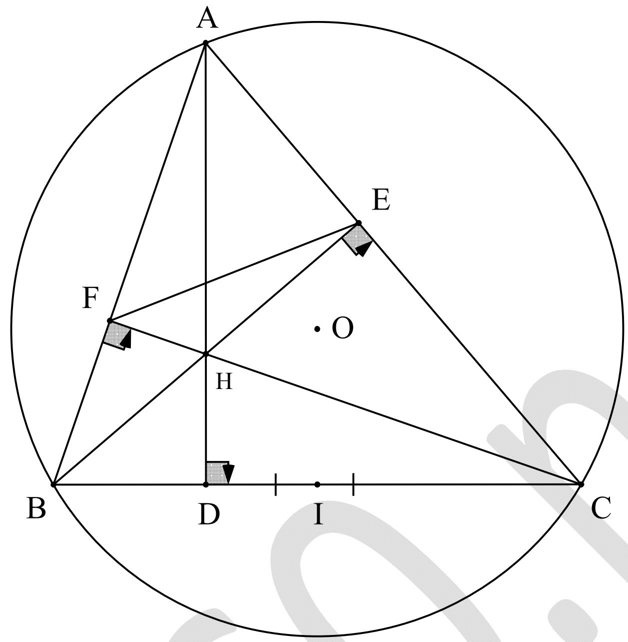
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1-x_2)^4}=\sqrt{2^4}$$
$$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=2^2$$
$$\Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=4$$
$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2-4=0$$
$$\Leftrightarrow (2m^3-2m)^2-4(-4m^4-1)-4=0 \text{ (do hệ thức Vi-ét)}$$
$$\Leftrightarrow 4m^6-8m^4+4m^2+16m^4+4-4=0$$
$$\Leftrightarrow 4m^6+8m^4+4m^2=$$
$$\Leftrightarrow 4m^2(m^4+2m^2+1)=0$$
$$\Leftrightarrow 4m^2(m^2+1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow 4m^2=0 \text{ (vì } m^2+1>0)$$
$$\Leftrightarrow m=0$$

Vậy m = 0 là giá trị cần tìm

Câu 5: Cho ΔABC có 3 góc nhọn (AB < AC) nội tiếp trong đường tròn (O; R). Gọi AD, BE, CF là các đường cao của ΔABC và chúng giao nhau tại H

a) Chứng minh tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn và xác định vị trí tâm I của đường tròn này

Giải:



Ta có $\widehat{BEC} = 90^0$ (vì BE $\perp$ AC)

$\Rightarrow$ E thuộc đường tròn đường kính BC (1)

Ta có $\widehat{BFC} = 90^0$ (vì CF $\perp$ AB)

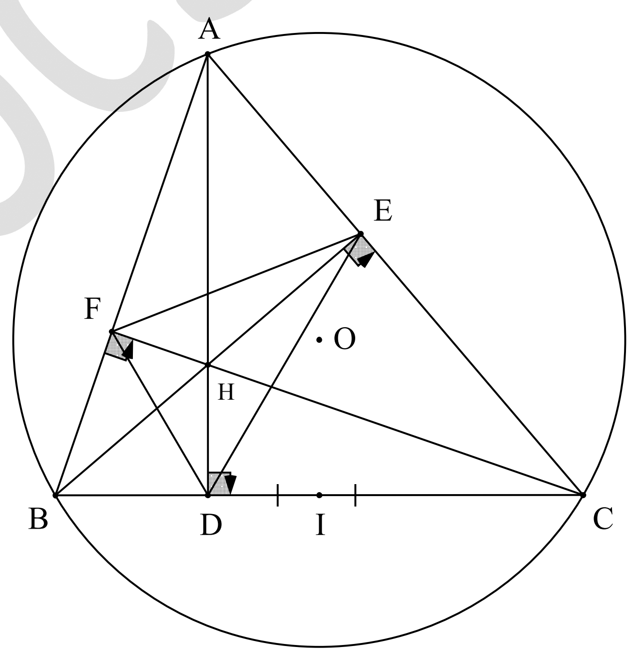
$\Rightarrow$ F thuộc đường tròn đường kính BC (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ 4 điểm B, C, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC

Hay tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC và có tâm I là trung điểm của BC

b) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF

Giải:



Xét tứ giác BFHD có:

$\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ (vì CF $\perp$ AB, AD $\perp$ BC)

$\Rightarrow$ Tứ giác BFHD nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

Xét tứ giác AEDB có:

$\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^0$ (vì BE $\perp$ AC, AD $\perp$ BC)

$\Rightarrow$ Tứ giác AEDB nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh E, D liên tiếp cùng nhìn cạnh AB dưới một góc vuông)

Ta có $\widehat{HFE} = \widehat{HBD}$ (cùng chắn cung EC của tứ giác BCEF nội tiếp)

$= \widehat{HFD}$ (cùng chắn cung HD của tứ giác BFHD nội tiếp)

$\Rightarrow$ HF là phân giác của góc EFD (3)

Ta có $\widehat{HDF} = \widehat{HBF}$ (cùng chắn cung HF của tứ giác BFHD nội tiếp)

$= \widehat{HDE}$ (cùng chắn cung AE của tứ giác AEDB nội tiếp)

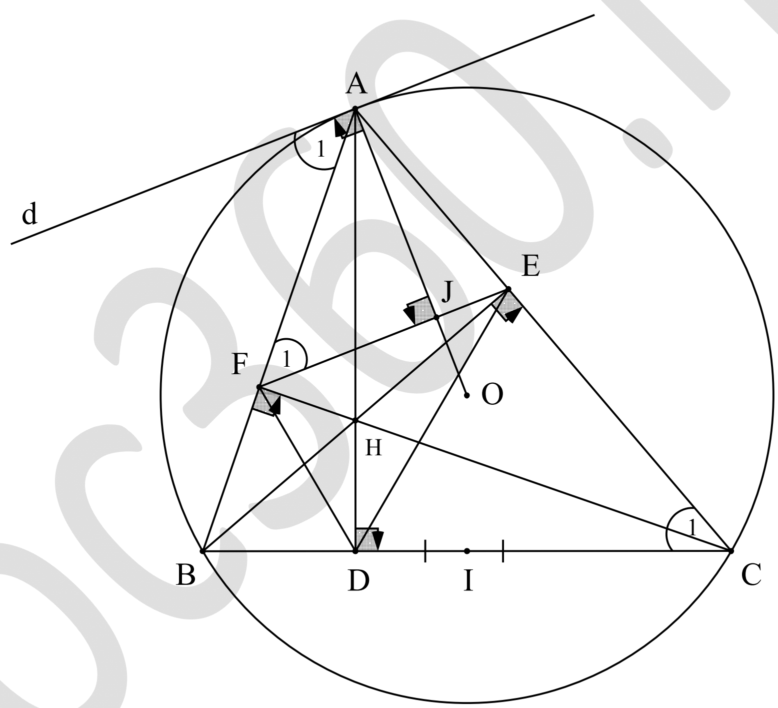
$\Rightarrow$ HD là phân giác của góc EDF (4)

Xét ΔDEF có: HE và HF là 2 đường phân giác cắt nhau tại H (do (3) và (4))

$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF

c) Chứng minh OA $\perp$ EF

Giải:



Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại điểm A

Ta có $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$= \hat{F}_1$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác BCEF nội tiếp)

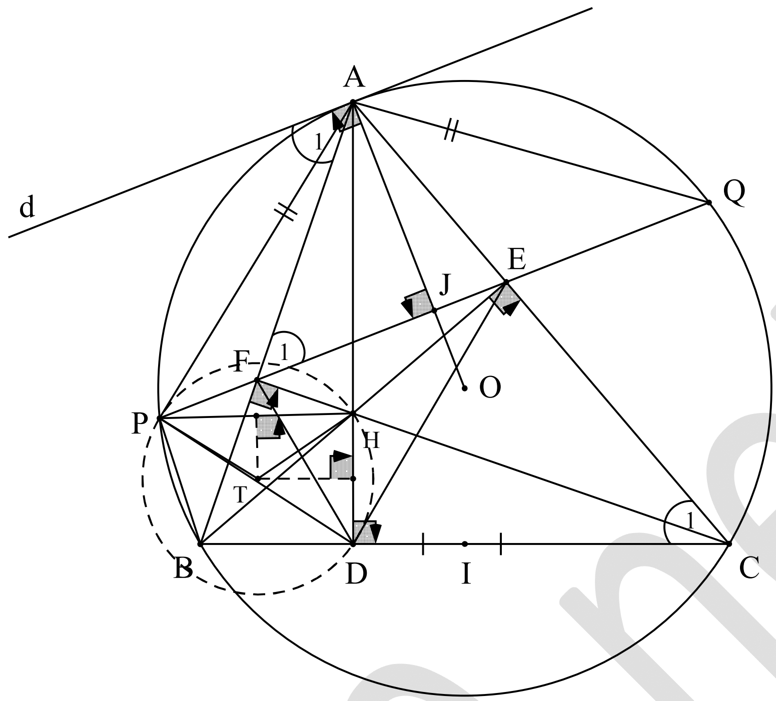
$\Rightarrow$ d // EF (vì 2 góc ở vị trí so le trong và bằng nhau: dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

Ta có d $\perp$ OA (vì d là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow$ EF $\perp$ OA (quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song)

d) Đường thẳng EF cắt (O) tại 2 điểm P và Q (F nằm giữa P và E). Chứng minh AP là một tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔPHD

Giải:



Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔPHD

$\Rightarrow$ T là giao điểm của 2 đường trung trực đoạn PH và HD

Xét ΔAFH và ΔADB có:

$\widehat{FAH}$: chung

$\widehat{AFH} = \widehat{ADB} = 90^0$ (vì CF $\perp$ AB, AD $\perp$ BC)

$\Rightarrow$ ΔAFH $\backsim$ ΔADB (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AF}{AD} \Leftrightarrow AH.AD = AF.AB$ (5)

Ta có OA $\perp$ PQ (do trên)

$\Rightarrow$ J là trung điểm của PQ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

$\Rightarrow$ OA là đường trung trực của PQ

$\Rightarrow$ AP = AQ (tính chất đường trung trực)

$\Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{ABP}$ (liên hệ giữa cung và dây)

Hay $\widehat{APF} = \widehat{ABP}$ (6)

Xét ΔAPF và ΔABP có:

$\widehat{PAF}$: chung

$\widehat{APF} = \widehat{ABP}$ (do (6))

$\Rightarrow$ ΔAPF $\backsim$ ΔABP (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AF}{AP} = \dfrac{AP}{AB} \Leftrightarrow AF.AB = AP^2$ (7)

Từ (5) và (7) $\Rightarrow AH.AD = AP^2$ (*)

Xét ΔAPH và ΔADP có:

$\widehat{PAH}$: chung

$\dfrac{AH}{AP} = \dfrac{AP}{AD}$ (do (*))

$\Rightarrow$ ΔAPH $\backsim$ ΔADP (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{APH} = \widehat{ADP}$ (**) (2 góc tương ứng)

Ta có $\widehat{APT} = \widehat{APH} + \widehat{HPT}$

$= \widehat{ADP} + \widehat{HPT}$ (do (**))

$= \frac{1}{2}\widehat{PTH} + \widehat{HPT}$ (hệ quả góc nội tiếp của đường tròn (T))

$= \frac{\widehat{PTH} + 2\widehat{HPT}}{2}$

$= \frac{\widehat{PTH} + \widehat{HPT} + \widehat{PHT}}{2}$ (vì TP = TP = bán kính đường tròn (T) nên ΔTPH cân tại T)

$= \frac{180^0}{2} = 90^0$ (tổng 3 góc trong ΔTPH)

$\Rightarrow$ AP $\perp$ PT tại P thuộc (T)

Vậy AP là một tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔPHD