

## BÀI GIẢI

### Câu 1:

a) Giải phương trình ẩn x:  $(x^2 + 5x)^2 - 2x^2 - 10x - 24 = 0$  (1)

#### Giải:

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$$

Đặt  $t = x^2 + 5x$

Phương trình (1) trở thành:  $t^2 - 2t - 24 = 0$  (\*)

Ta có  $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-24) = 1 + 24 = 25 > 0$ ;  $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{25} = 5$

Do  $\Delta' > 0$  nên phương trình (\*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$t_1 = \frac{1+5}{1} = 6; t_2 = \frac{1-5}{1} = -4$$

+ Với  $t_1 = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

Ta có  $a + b + c = 1 + 5 + (-6) = 0$  nên phương trình có 2 nghiệm:

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{1} = -6$$

+ Với  $t_2 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 5x = -4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$

Ta có  $a - b + c = 1 - 5 + 4 = 0$  nên phương trình có 2 nghiệm:

$$x_3 = -1; x_4 = -\frac{c}{a} = -\frac{4}{1} = -4$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là:  $S = \{1; -6; -1; -4\}$

b) Bà Minh có 3 530 000 đ với tổng cộng có 74 tờ tiền gồm 3 loại tiền: loại 20000 đ, loại 50000 đ và loại 100000 đ. Hỏi mỗi loại tiền có mấy tờ biết rằng số tờ tiền loại 20000 đ gấp đôi số tờ tiền loại 100000 đ?

#### Giải:

Gọi x, y, z (tờ) lần lượt là số tờ tiền loại 20000đ, 50000đ và 100000đ ( $x, y, z > 0$ )

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y + z = 74 \\ 20000x + 50000y + 100000z = 3530000 \\ x = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 74 & (1) \\ 2x + 5y + 10z = 353 & (2) \\ x = 2z & (3) \end{cases}$$

Thay (3) vào (1) và (2) ta được hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} 2z + y + z = 74 \\ 2 \cdot 2z + 5y + 10z = 353 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 3z = 74 \\ 5y + 14z = 353 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y - 15z = -370 \\ 5y + 14z = 353 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -z = -17 \\ 5y + 14z = 353 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 17 \\ 5y + 238 = 353 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 17 \\ y = 23 \end{cases} \text{ (thỏa)}$$

Thay  $z = 17$  vào (3) ta được:  $x = 2 \cdot 17 = 34$  (thỏa)

Vậy số tờ tiền loại 20000đ, 50000đ và 100000đ lần lượt là 34 (tờ), 23 (tờ), 17 (tờ)

Câu 2: Cho (P):  $y = \frac{-x^2}{2}$  và (D):  $y = \frac{3}{2}x + 1$

a) Vẽ (P) và (D) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy rồi tìm tọa độ giao điểm của chúng bằng phép toán

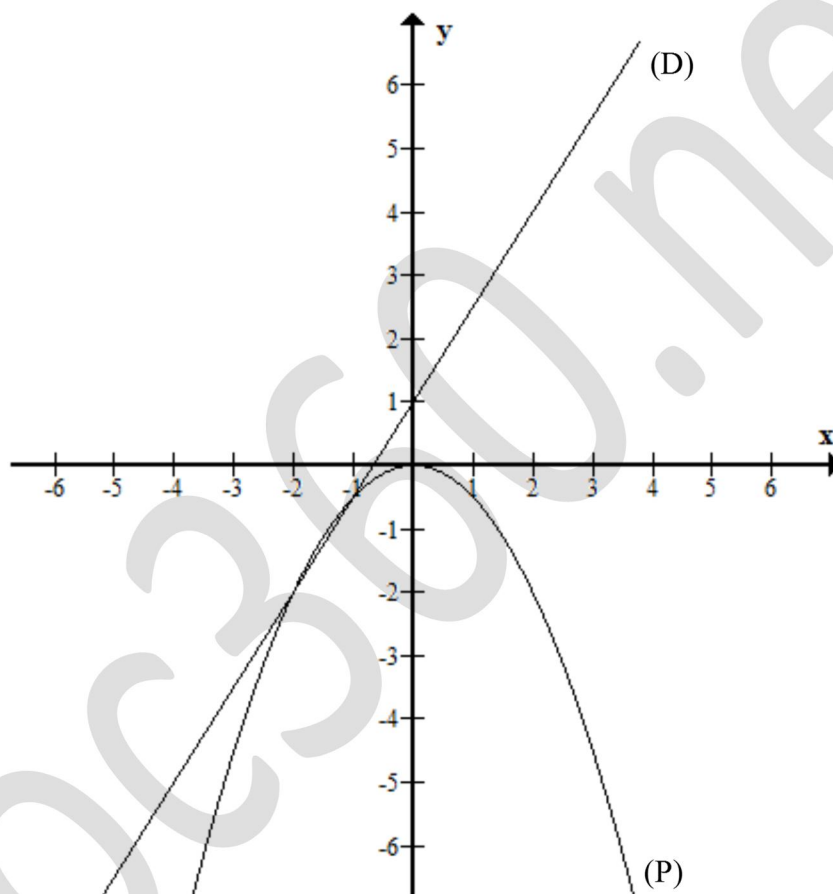
#### Giải:

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{-x^2}{2}$	-8	-2	0	-2	-8

x	0	2
$y = \frac{3}{2}x + 1$	1	4

Vẽ đồ thị



- b) Viết phương trình đường thẳng (D') song song với đường thẳng (D) và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 1

**Giải:**

Gọi (D'):  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) là đường thẳng cần tìm

$$\text{Ta có } (D') // (D) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b \neq 1 \end{cases} \Rightarrow (D'): y = \frac{3}{2}x + b \quad (b \neq 1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (D') và (P) có dạng:  $\frac{-x^2}{2} = \frac{3}{2}x + b$  (\*)

Do (D') cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 1 nên  $x = 1$  là nghiệm của phương trình (\*)

$$\Rightarrow \frac{-1^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot 1 + b \Leftrightarrow \frac{-1}{2} = \frac{3}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{-1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \text{ (thỏa)}$$

Vậy (D'):  $y = \frac{3}{2}x - 2$  là đường thẳng cần tìm

**Câu 3:**

a) Rút gọn biểu thức:  $P = \frac{4+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} + \frac{4-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

**Giải:**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{4+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} + \frac{4-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{4-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} \\ &= \frac{4+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}})} + \frac{4-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}})} \\ &= \frac{4+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{4-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{2+\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \\ &= \frac{4+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{4-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{2+\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \\ &= \frac{4+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{2+|\sqrt{5}+1|} + \frac{4-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{2+|\sqrt{5}-1|} \\ &= \frac{4+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{2+\sqrt{5}+1} + \frac{4-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{2+\sqrt{5}-1} \quad (\text{vì } \sqrt{5}+1 > 0; \sqrt{5}-1 > 0) \\ &= \frac{4+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \frac{4-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(4+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} + \frac{(4-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \\ &= \frac{12-4\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{9-5} + \frac{4\sqrt{5}-4-5+\sqrt{5}}{5-1} \\ &= \frac{7-\sqrt{5}}{4} + \frac{5\sqrt{5}-9}{4} = \frac{7-\sqrt{5}+5\sqrt{5}-9}{4} = \frac{4\sqrt{5}-2}{4} = \frac{2\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

Vậy  $A = \frac{2\sqrt{5}-1}{2}$

b) Giả sử cách tính tiền nước sinh hoạt ở Thành phố như sau cho 1 người:

Mức 1 cho  $4m^3$  đầu tiên  $\times 7000đ/1m^3$

Mức 2 cho  $3m^3$  tiếp theo  $\times 10000đ/1m^3$

Mức 3 cho số  $m^3$  còn lại  $\times 12500đ/1m^3$

- Số tiền nước phải trả cho ba mức này gọi là A
- Thuế VAT:  $B = Ax10\%$
- Thuế môi trường:  $C = Ax15\%$
- Tổng số tiền phải trả là:  $T = A + B + C$
- Tháng 5/2017 gia đình bà Bê có 2 người phải trả hết số tiền:  $T = 207\,500đ$

Hỏi gia đình bà Bê hết bao nhiêu  $m^3$  nước?

**Giải:**

Gọi  $x$  ( $m^3$ ) là số  $m^3$  nước mà gia đình bà Bê đã sử dụng trong tháng 5/2017 ( $x > 0$ )

Số tiền phải trả cho ba mức này là:

$$A = 4.7000 + 3.10000 + (x - 4 - 3).12500 = 58000 + (x - 7).12500 \text{ (đồng)}$$

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$A + A.10\% + A.15\% = 207500$$

$$\Leftrightarrow 1,25A = 207500$$

$$\Leftrightarrow A = 166000$$

$$\Leftrightarrow 58000 + (x - 7).12500 = 166000$$

$$\Leftrightarrow (x - 7).12500 = 108000$$

$$\Leftrightarrow x - 7 = 8,64$$

$$\Leftrightarrow x = 15,64 \text{ (nhận)}$$

Vậy gia đình bà Bê đã sử dụng hết 15,64 ( $m^3$ ) nước

**Câu 4:** Cho phương trình ẩn  $x$ :  $x^2 - (2m+3)x + 2(m+1) = 0$  với  $m$  là tham số

a) Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm với mọi  $m$

**Giải:**

Ta có  $\Delta = [-(2m+3)]^2 - 4.1.2(m+1) = 4m^2 + 12m + 9 - 8m - 8 = 4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2 \geq 0, \forall m$

Do  $\Delta \geq 0, \forall m$  nên phương trình có hai nghiệm với mọi  $m$

b) Tìm  $m$  để phương trình có 2 nghiệm phân biệt mà nghiệm này gấp 4 lần nghiệm kia

**Giải:**

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow 2m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{2} \text{ (do câu a)}$$

Giả sử nghiệm  $x_1$  gấp 4 lần nghiệm  $x_2$  nên ta có:  $x_1 = 4x_2$

Với  $m \neq -\frac{1}{2}$  phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-(2m+3)}{1} = 2m+3 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2(m+1)}{1} = 2m+2 \end{cases}$$

Thay  $x_1 = 4x_2$  vào hệ thức Vi-ét ta được:

$$\begin{cases} 4x_2 + x_2 = 2m+3 \\ 4x_2 \cdot x_2 = 2m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2m+3}{5} \\ x_2^2 = \frac{m+1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{2m+3}{5}\right)^2 &= \frac{m+1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{4m^2+12m+9}{25} &= \frac{m+1}{2} \\ \Leftrightarrow 2(4m^2+12m+9) &= 25(m+1) \\ \Leftrightarrow 8m^2+24m+18 &= 25m+25 \\ \Leftrightarrow 8m^2+24m+18-25m-25 &= 0 \\ \Leftrightarrow 8m^2-m-7 &= 0 \end{aligned}$$

Ta có  $a+b+c=8+(-1)+(-7)=0$  nên phương trình luông có 2 nghiệm:

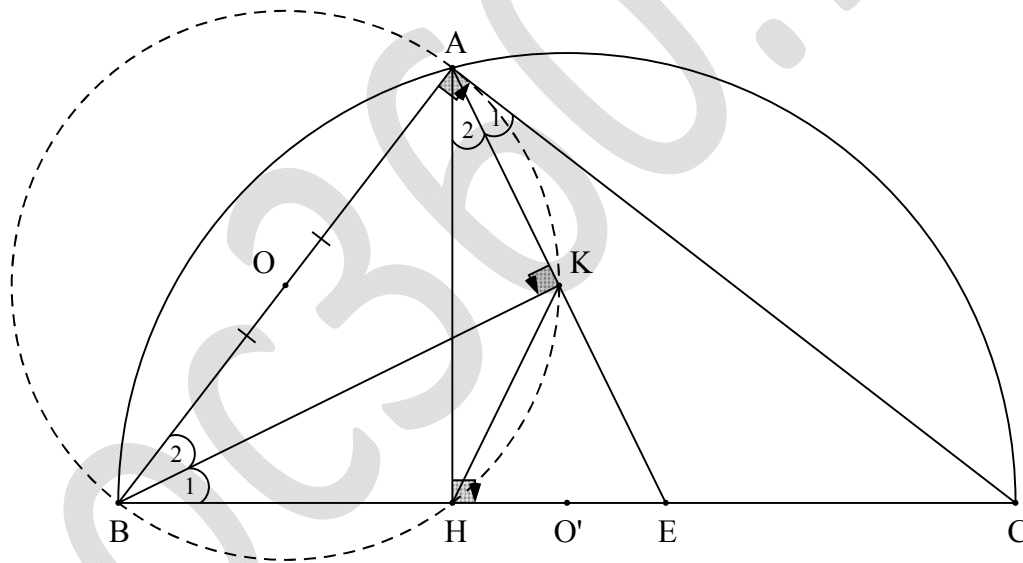
$$m_1 = 1 \text{ (nhận); } m_2 = \frac{c}{a} = \frac{-7}{8} \text{ (nhận)}$$

Vậy  $m_1 = 1; m_2 = \frac{-7}{8}$  là các giá trị cần tìm

**Câu 5:** Cho nửa đường tròn ( $O'$ ; R) đường kính BC và điểm A trên nửa đường tròn sao cho  $AB < AC$ , vẽ  $AH \perp BC$  tại H. Phân giác của góc CAH cắt BC tại E, phân giác của góc ABC cắt AE ở K

a) Chứng minh tứ giác AKHB nội tiếp và xác định tâm O của đường tròn này

**Giải:**



Ta có  $\widehat{BAC} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ( $O'$ ))

$\Rightarrow \widehat{CAH} = \widehat{ABC}$  (cùng phụ góc BAH)

$\Leftrightarrow 2\widehat{A}_2 = 2\widehat{B}_1 \Leftrightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1$  (1) (vì AE là phân giác góc CAH, BK là phân giác góc ABC)

Xét tứ giác AKHB có:  $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_1$  (do (1))

$\Rightarrow$  Tứ giác AKHB nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh A, B liên tiếp cùng nhìn cạnh KH dưới một góc bằng nhau)

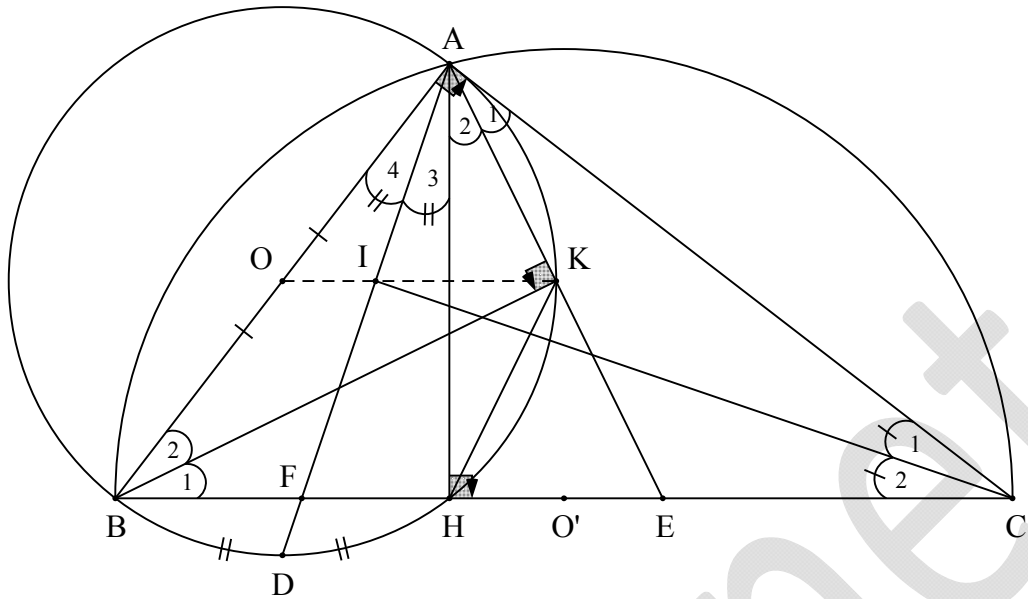
$\Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$  (cùng chắn cung AB)

$\Rightarrow$  4 điểm A, K, H, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow$  Tâm O là trung điểm của AB

b) Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ BH của đường tròn (O), phân giác của góc ACB cắt AD tại I. Chứng minh rằng O, I, K thẳng hàng

**Giải:**



Gọi F là giao điểm của AD và BH

Ta có cung DB = cung DH (vì D là đỉnh chính giữa cung nhỏ BH)

$\Rightarrow \hat{A}_3 = \hat{A}_4$  (2) (liên hệ giữa góc nội tiếp và dây cung)

Ta có  $\hat{AFC} = 90^\circ - \hat{A}_3$  (2 góc phụ nhau)

$$= 90^\circ - \hat{A}_4 \text{ (do (2))}$$

$$= \hat{FAC} \text{ (3) (2 góc phụ nhau)}$$

Xét  $\triangle CAF$  có:  $\hat{AFC} = \hat{FAC}$  (do (3))

$\Rightarrow \triangle CAF$  cân tại C

$\Rightarrow CI$  là phân giác cũng là trung tuyến

$\Rightarrow I$  là trung điểm của AF (4)

Xét  $\triangle BAE$  có: BK là đường phân giác vừa là đường cao

$\Rightarrow \triangle BAE$  cân tại B nên BK cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow K$  là trung điểm của AE (5)

Xét  $\triangle ABF$  có: O là trung điểm của AB, I là trung điểm của AF (do (4))

$\Rightarrow OI$  là đường trung bình của  $\triangle ABF$

$\Rightarrow OI // BF$  hay  $OI // BE$  (\*)

Xét  $\triangle AFE$  có: I là trung điểm của AF, K là trung điểm của AE (do (5))

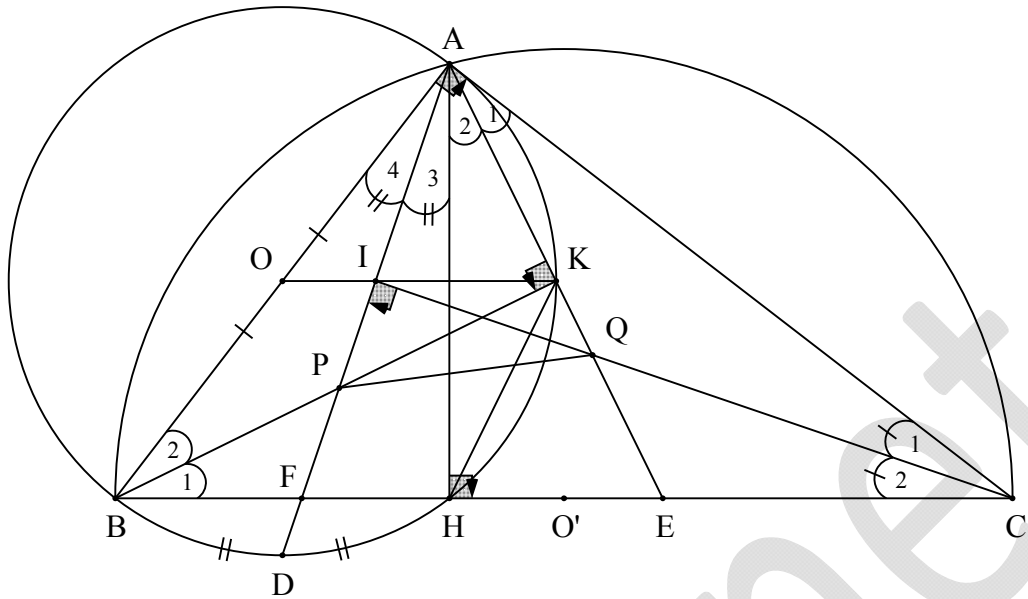
$\Rightarrow IK$  là đường trung bình của  $\triangle AFE$

$\Rightarrow IK // FE$  hay  $IK // BE$  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*)  $\Rightarrow O, I, K$  thẳng hàng

c) BK cắt AD tại P, CI cắt AE tại Q. Chứng minh tứ giác BPQC nội tiếp

**Giải:**



Ta có  $\triangle CAF$  cân tại C nên CI là phân giác cũng là đường cao  
 $\Rightarrow CI \perp AF$

Xét tứ giác PIKQ có:

$$\widehat{PIQ} = \widehat{PKQ} = 90^\circ \text{ (vì } BK \perp AE, CI \perp AF\text{)}$$

$\Rightarrow$  Tứ giác PIKQ nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh I, K liên tiếp cùng nhìn cạnh PQ dưới một góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{KPQ} = \widehat{KIQ}$  (cùng chắn cung KQ của tứ giác PIKQ nội tiếp)

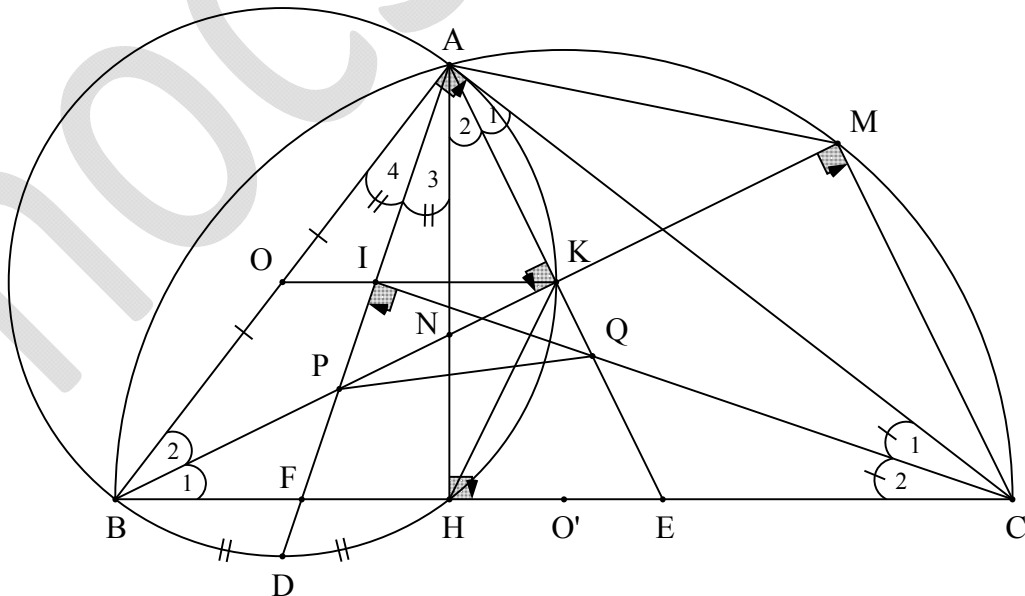
$$= \widehat{C}_2 \text{ (6) (vì } IK // BE \text{ hay } IK // BC \text{ và 2 góc ở vị trí so le trong)}$$

Xét tứ giác BPQC có:  $\widehat{KPQ} = \widehat{C}_2$  (do (6))

$\Rightarrow$  Tứ giác PIKQ nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

- d) Gọi giao điểm của BK với đường tròn ( $O'$ ) và với AH lần lượt là M và N. Nếu cho góc  $ABC = 60^\circ$ , tính theo R bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN

**Giải:**



Ta có  $\triangle BAC$  vuông tại A

$$\Rightarrow \sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC}; \cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC} \text{ (hệ thức lượng)}$$

$$\Leftrightarrow AC = 2R \cdot \sin 60^\circ; AB = 2R \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow AC = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}; AB = 2R \cdot \frac{1}{2} = R$$

Ta có  $\Delta BAC$  vuông tại A và có AH là đường cao

$$\Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \text{ (hệ thức lượng)}$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{R \cdot R\sqrt{3}}{2R} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Và  $BH \cdot BC = AB^2$  (hệ thức lượng)

$$\Leftrightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

Ta có AN là phân giác của góc ABH

$$\Rightarrow \frac{NH}{BH} = \frac{NA}{BA} = \frac{NH+NA}{BH+BA} \text{ (tính chất đường phân giác và tỉ lệ thức)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{NH}{BH} = \frac{AH}{BH+BA}$$

$$\Leftrightarrow NH = \frac{AH \cdot BH}{BH+BA} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{2}}{\frac{R}{2} + R} = \frac{R\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Ta có } \hat{B}_1 = \frac{\hat{A}BC}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \text{ (vì } \hat{A}BC = 60^\circ \text{ và BK là phân giác của góc ABC)}$$

Ta có  $\hat{B}MC = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \Delta BMC$  vuông tại M

$$\Rightarrow \cos B_1 = \frac{BM}{BC} \Leftrightarrow BM = BC \cdot \cos B_1 = 2R \cdot \cos 30^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

Ta có  $\Delta BHN$  vuông tại H

$$\Rightarrow BN^2 = BH^2 + NH^2 \text{ (định lý Pytago)}$$

$$= \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{12} = \frac{R^2}{3}$$

$$\Rightarrow BN = \sqrt{\frac{R^2}{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow NM = BM - BN = R\sqrt{3} - \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

Ta có  $\hat{A}MN = \hat{A}CB$  (cùng chắn cung AB của đường tròn (O'))

$$= 90^\circ - \hat{A}BC \text{ (2 góc phụ nhau)}$$

$$= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Ta có  $\hat{A}NM = \hat{B}NH$  (2 góc đối đỉnh)

$$= 90^\circ - \hat{B}_1 \text{ (2 góc phụ nhau)}$$

$$= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Xét  $\Delta AMN$  có:  $\hat{A}MN + \hat{A}NM + \hat{N}AM = 180^\circ$  (tổng 3 góc trong tam giác AMN)



$$\Leftrightarrow 30^\circ + 60^\circ + \widehat{NAM} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{NAM} = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$$

$\Rightarrow \Delta AMN$  vuông tại A

$\Rightarrow$  Đường tròn ngoại tiếp  $\Delta AMN$  có đường kính là NM

$\Rightarrow$  Bán kính của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta AMN$  là:  $\frac{NM}{2} = \frac{\frac{2R\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$