

BÀI GIẢI

Câu 1:

a) Giải phương trình: $(2x^2 - 3)(x^2 + 1) = 7$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow 2x^4 + 2x^2 - 3x^2 - 3 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - x^2 - 10 = 0$$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$)

Phương trình (1) trở thành: $2t^2 - t - 10 = 0$ (*)

Ta có $\Delta = (-1)^2 - 4.2.(-10) = 1 + 80 = 81 > 0$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$t_1 = \frac{1+9}{2.2} = \frac{5}{2} \text{ (nhận); } t_2 = \frac{1-9}{2.2} = -2 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } t_1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S = \left\{ \frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{\sqrt{10}}{2} \right\}$

- b) Bác Năm mua một thùng trái cây cân nặng 16kg gồm hai loại là táo và xoài, táo giá 50 ngàn đồng/kg, xoài giá 70 ngàn đồng/kg. Hỏi Bác Năm mua bao nhiêu kg táo và xoài mỗi loại biết rằng giá tiền của thùng trái cây là 900 ngàn đồng

Giải:

Gọi x (kg) táo, y (kg) xoài mỗi loại mà Bác Năm mua ($x > 0$; $y > 0$)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 50x + 70y = 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 16 \\ 5x + 7y = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x - 7y = -112 \\ 5x + 7y = 90 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -22 \\ 5x + 7y = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ 55 + 7y = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy Bác Năm mua 11 kg táo và 5 kg xoài

Câu 2:

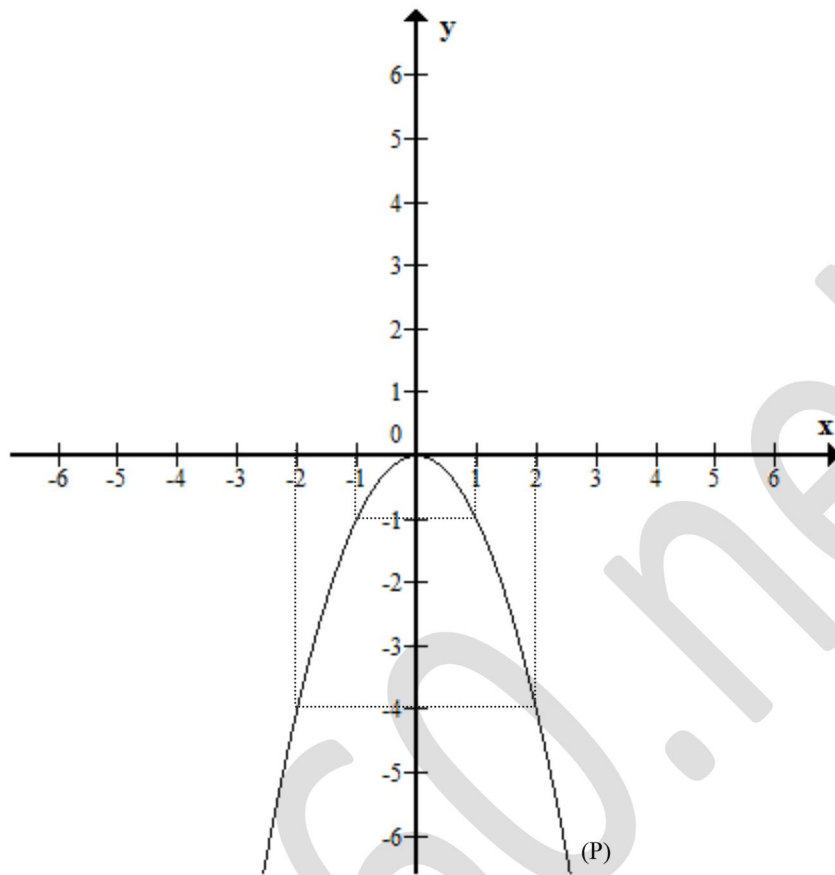
- a) Trong mặt phẳng Oxy vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -\frac{x^2}{4}$

Giải:

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	2	4
$y = -\frac{x^2}{4}$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị



b) Tìm m để (P) cắt đường thẳng (D): $y = \frac{1}{2}x - m$ tại điểm có hoành độ bằng -4

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) có dạng: $-\frac{x^2}{4} = \frac{1}{2}x - m$ (2)

Do (P) cắt (D) tại điểm có hoành độ bằng -4 nên $x = -4$ là nghiệm của (2)

$$\Rightarrow -\frac{(-4)^2}{4} = \frac{1}{2} \cdot (-4) - m \Leftrightarrow -4 = -2 - m \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm

Câu 3:

a) Thu gọn biểu thức: $\sqrt{(5+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} + \sqrt{\frac{3\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}-3}}$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \sqrt{(5+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} + \sqrt{\frac{3\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}-3}} \\ &= \sqrt{25-10\sqrt{5}+5\sqrt{5}-10} + \sqrt{\frac{(3\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}+3)}{(2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+3)}} \\ &= \sqrt{15-5\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{30+9\sqrt{5}+2\sqrt{5}+3}{20-9}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{15-5\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{33+11\sqrt{5}}{11}}$$

$$= \sqrt{5(3-\sqrt{5})} + \sqrt{3+\sqrt{5}}$$

Đặt $M = \sqrt{5(3-\sqrt{5})} + \sqrt{3+\sqrt{5}}$ ($M > 0$)

$$\Rightarrow M^2 = 5(3-\sqrt{5}) + 2\sqrt{5(3-\sqrt{5})}\sqrt{3+\sqrt{5}} + 3 + \sqrt{5}$$

$$= 15 - 5\sqrt{5} + 2\sqrt{5(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} + 3 + \sqrt{5}$$

$$= 18 - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5(9-5)}$$

$$= 18 - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{20}$$

$$= 18 - 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$$

$$= 18$$

$$\Rightarrow M = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Vậy $\sqrt{(5+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} + \sqrt{\frac{3\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}-3}} = 3\sqrt{2}$

- b) Lượng khách quốc tế đến Việt Nam trong tháng 9/2016 ước đạt 813007 lượt; giảm 9,6% so với tháng 8/2016 và tăng 2,8% so với cùng kỳ năm 2015. Tính lượng khách quốc tế đến Việt Nam trong tháng 8/2016 và tháng 9/2015?

Giải:

Lượng khách đến Việt Nam trong tháng 8/2016 là: $\frac{813007 \cdot 100}{100 - 9,6} \approx 899344$ lượt

Lượng khách đến Việt Nam trong tháng 9/2015 là: $\frac{813007 \cdot 100}{100 + 2,8} \approx 790863$ lượt

Câu 4: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ (1) (x là ẩn số)

- a) Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có nghiệm

Giải:

Ta có $\Delta' = [-(m+1)]^2 - 1 \cdot (m^2 - 3) = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 3 = 2m + 4$

Để phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2m \geq -4 \Leftrightarrow m \geq -2$

Vậy $m \geq -2$ thì phương trình (1) luôn có nghiệm

- b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) thỏa mãn:

$$(2x_1 - 1)(x_2 + 1) + (2x_2 - 1)(x_1 + 1) = x_1^2 + x_2^2 + 14$$

Giải:

Theo câu a, với $m \geq -2$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2(m+1)}{1} = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 3}{1} = m^2 - 3 \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có: $(2x_1 - 1)(x_2 + 1) + (2x_2 - 1)(x_1 + 1) = x_1^2 + x_2^2 + 14$

$$\Leftrightarrow 2x_1 x_2 + 2x_1 - x_2 - 1 + 2x_1 x_2 + 2x_2 - x_1 - 1 = x_1^2 + x_2^2 + 14$$

$$\Leftrightarrow 4x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 14$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 6x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 16 = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (2m+2)^2 - 6(m^2-3) - (2m+2) + 16 = 0 \text{ (do hệ thức Vi-ét)} \\ &\Leftrightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 6m^2 + 18 - 2m - 2 + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2m^2 + 6m + 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 3m - 18 = 0 (*) \end{aligned}$$

Ta có $\Delta = (-3)^2 - 4.1.(-18) = 9 + 72 = 81 > 0$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{3+9}{2.1} = 6 \text{ (nhận)}; m_2 = \frac{3-9}{2.1} = -3 \text{ (loại)}$$

Vậy $m = 6$ là giá trị cần tìm

Câu 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H và có AK là đường kính

a) Chứng minh: tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn và tứ giác BKCH là hình bình hành

Giải:

Xét tứ giác BCEF có:

$$\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ \text{ (vì } BE \perp AC, CF \perp AB)$$

\Rightarrow Tứ giác BCEF nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh E, F liên tiếp cùng nhìn cạnh BC dưới 1 góc bằng nhau)

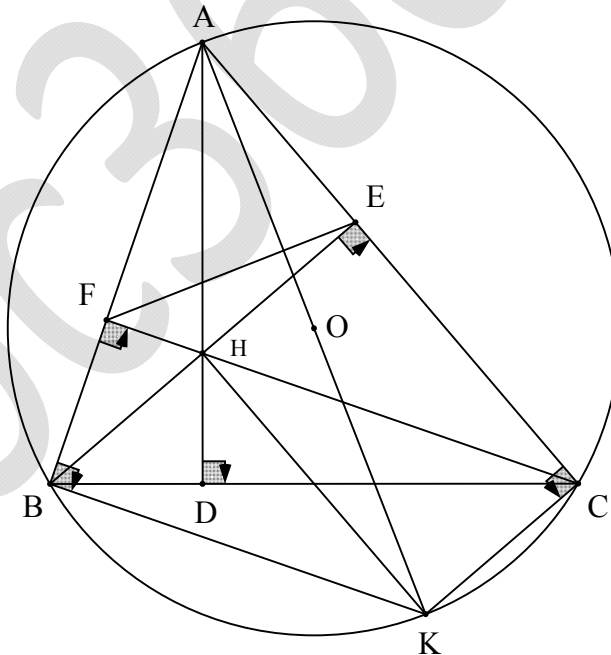
Ta có $\widehat{BK} = \widehat{CK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Xét tứ giác BKCH có:

$$BH \parallel KC \text{ (cùng vuông góc với } AC)$$

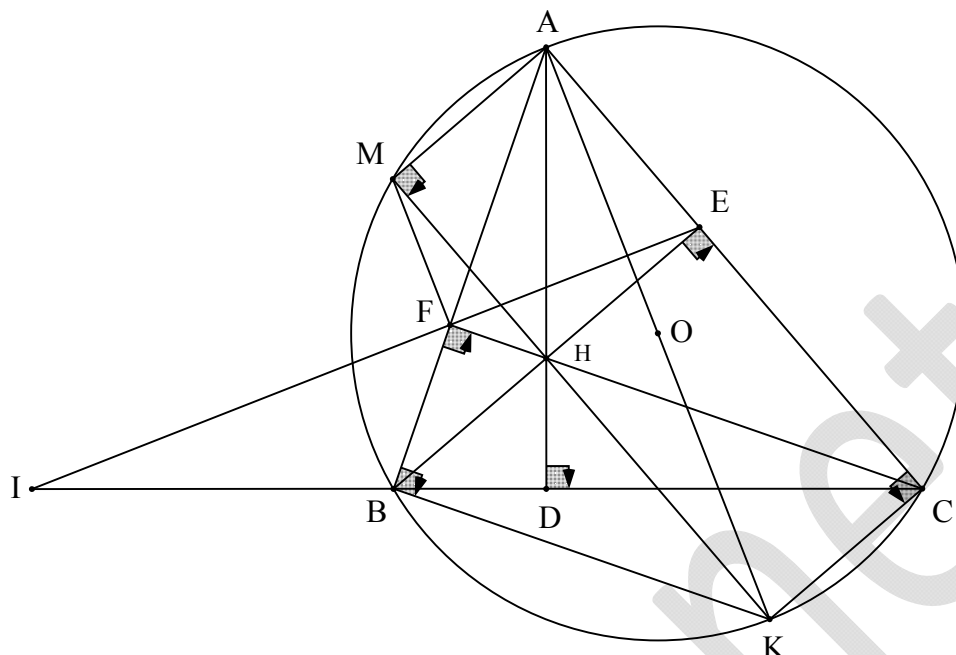
$$CH \parallel KB \text{ (cùng vuông góc với } AB)$$

\Rightarrow Tứ giác BKCH là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành)



b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF. Tia KH cắt (O) tại M. Chứng minh: năm điểm A, M, E, H, F cùng nằm trên một đường tròn

Giải:



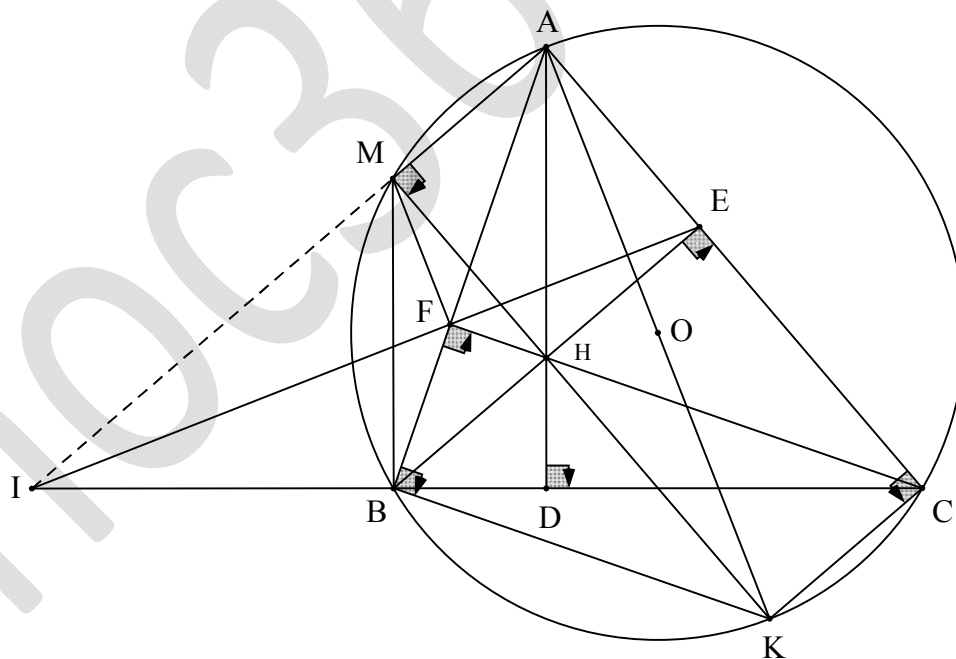
Ta có $\widehat{AMK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = \widehat{AMH} = 90^\circ$ (vì $BE \perp AC, CF \perp AB, \widehat{AMK} = 90^\circ$)

\Rightarrow 5 điểm A, M, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH

c) Chứng minh: ba điểm I, A, M thẳng hàng

Giải:



Ta có $\widehat{MFI} = \widehat{MAE}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác AMFE nội tiếp đường tròn đường kính AH)

$= \widehat{MBI}$ (1) (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác AMBC nội tiếp đường tròn (O))

Xét tứ giác IMFB có: $\widehat{MFI} = \widehat{MBI}$ (do (1))

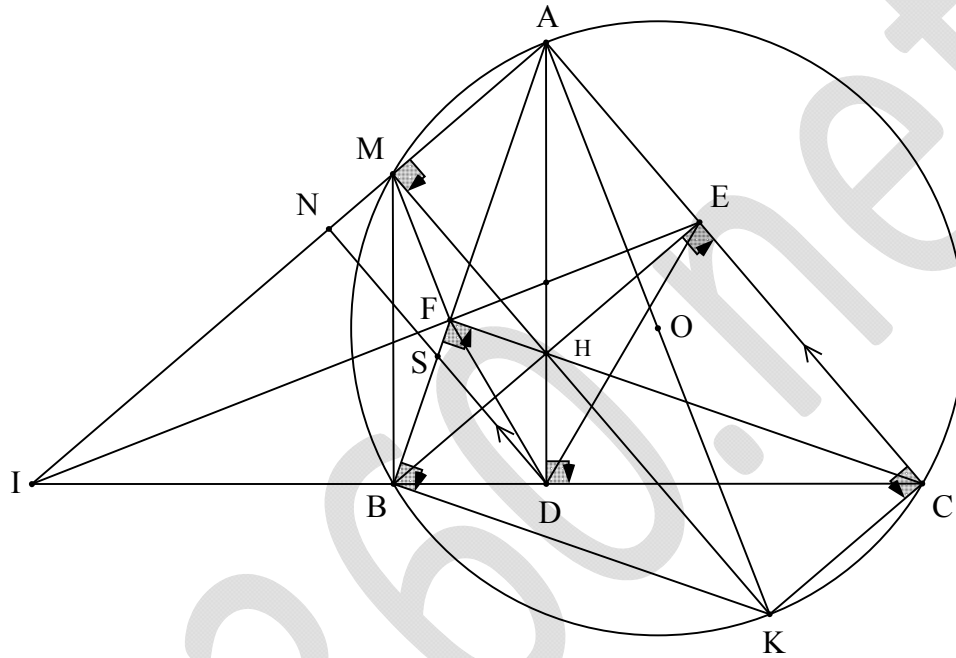
\Rightarrow Tứ giác IMFB nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh F, B liên tiếp cùng nhìn cạnh MI dưới 1 góc bằng nhau)

Ta có $\widehat{I\hat{M}A} = \widehat{I\hat{M}B} + \widehat{B\hat{M}A}$
 $= \widehat{I\hat{F}B} + \widehat{B\hat{M}A}$ (cùng chắn cung IB của tứ giác IMFB nội tiếp)
 $= \widehat{A\hat{C}B} + \widehat{B\hat{M}A}$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác BCEF nội tiếp)
 $= 180^\circ$ (tổng 2 góc đối của tứ giác AMBC nội tiếp)

\Rightarrow ba điểm I, A, M thẳng hàng

- d) Qua D vẽ đường thẳng song song với AC cắt AB và AI lần lượt tại S và N. Chứng minh S là trung điểm của DN

Giải:



Ta có $SD \parallel AC$ và $ND \parallel AC$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{SD}{AC} = \frac{BD}{BC} \text{ và } \frac{ND}{AC} = \frac{ID}{IC} \text{ (hệ quả Talet)}$$

$$\Rightarrow SN = \frac{AC \cdot BD}{BC} \text{ và } ND = \frac{AC \cdot ID}{IC}$$

$$\Rightarrow \frac{ND}{SN} = \frac{AC \cdot ID}{IC} : \frac{AC \cdot BD}{BC} = \frac{AC \cdot ID}{IC} \cdot \frac{BC}{AC \cdot BD} = \frac{ID \cdot BC}{IC \cdot BD} \quad (*)$$

Xét tứ giác AEDB có:

$$\widehat{A\hat{E}B} = \widehat{A\hat{D}B} = 90^\circ \text{ (vì } BE \perp AC, AD \perp BC)$$

\Rightarrow Tứ giác AEDB nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh E, D liên tiếp cùng nhìn cạnh AB dưới 1 góc vuông)

Ta có $\widehat{H\hat{E}F} = \widehat{H\hat{A}F}$ (cùng chắn cung HF của đường tròn đường kính AH)

$$= \widehat{H\hat{E}D} \text{ (cùng chắn cung BD của tứ giác AEDB nội tiếp)}$$

\Rightarrow BE là phân giác của góc IED

$$\Rightarrow \frac{BI}{BD} = \frac{EI}{ED} \quad (2)$$

Ta có $CE \perp BE$ tại E

\Rightarrow CE là phân giác ngoài của góc IED

$$\Rightarrow \frac{CI}{CD} = \frac{EI}{ED} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow \frac{BI}{BD} = \frac{CI}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{IB}{IC} = \frac{IB+BD}{IC+DC} = \frac{ID}{IC+DC} \text{ (tính chất tỉ lệ thức)}$$

$$\Rightarrow BD(IC+DC) = ID \cdot DC$$

$$\Leftrightarrow BD(IC+IC-ID) = ID \cdot DC$$

$$\Leftrightarrow BD(2IC-ID) = ID \cdot DC$$

$$\Leftrightarrow 2IC \cdot BD - ID \cdot BD = ID \cdot DC$$

$$\Leftrightarrow 2IC \cdot BD = ID \cdot BD + ID \cdot DC$$

$$\Leftrightarrow 2IC \cdot BD = ID(BD+DC)$$

$$\Leftrightarrow 2IC \cdot BD = ID \cdot BC$$

$$\Leftrightarrow \frac{ID \cdot BC}{IC \cdot BD} = 2 \text{ (**)}$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow \frac{ND}{SN} = 2$$

$\Rightarrow S$ là trung điểm của DN