BÀI GIẢI

Câu 1: (2 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình:

a) $(x+2)(x-5)=-6$ (1)

Giải:

$(1)\Leftrightarrow x^2-5x+2x-10+6=0$

$\Leftrightarrow x^2-3x-4=0$

Ta có $a-b+c=1-(-3)+(-4)=0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm:

$$x_1=-1;x_2=-\frac{c}{a}=-\frac{-4}{1}=4$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=\{-1;4\}$

b) $x^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\sqrt{6}=0$ (2)

Giải:

Ta có $\Delta=\left[-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right]^2-4.1.(-\sqrt{6})=3-2\sqrt{6}+2+4\sqrt{6}=5+2\sqrt{6}>0$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\left|\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (vì $\sqrt{3}+\sqrt{2}>0$)

Do $\Delta>0$ nên phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2.1}=\sqrt{3};x_2=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2.1}=-\sqrt{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là: $S=\{\sqrt{3};-\sqrt{2}\}$

c) $\begin{cases}2x+3y=-6\\3x-4y=25\end{cases}$ (3)

Giải:

$(3)\Leftrightarrow\begin{cases}8x+12y=-24\\9x-12y=75\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}17x=51\\3x-4y=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\9-4y=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-4\end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình (3) là: $(x;y)=(3;-4)$

d) $3x^4-8=4(x^2-1)$ (4)

Giải:

$(4)\Leftrightarrow 3x^4-8=4x^2-4$

$\Leftrightarrow 3x^4-4x^2-4=0$

Đặt $t=x^2$ $(t\ge 0)$

Phương trình (4) trở thành: $3t^2-4t-4=0$ (*)

Ta có $\Delta'=(-2)^2-3.(-4)=4+12=16>0;\sqrt{\Delta'}=\sqrt{16}=4$

Do $\Delta'>0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$t_1=\frac{2+4}{3}=2 \text{ (nhận)};\ t_2=\frac{2-4}{3}=\frac{-2}{3} \text{ (loại)}$$

Với $t_1=2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình (4) là: $S=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

Câu 2: (1,5 điểm)

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y=\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng $(D): y=-\frac{1}{2}x+4$ trên cùng một hệ trục tọa độ

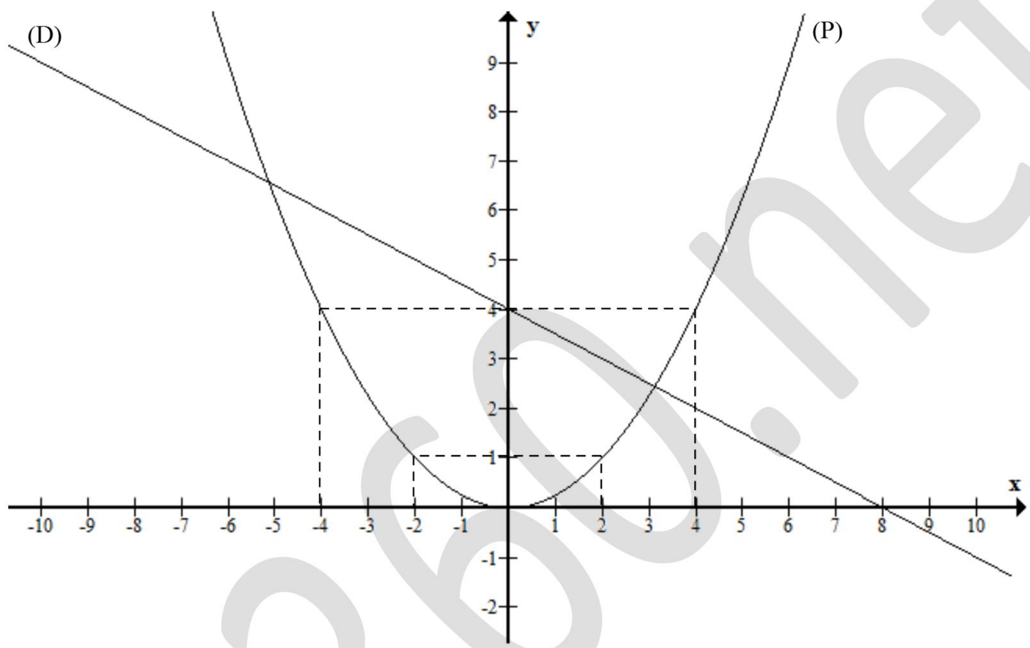
Giải:

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	2	4
$y=\frac{1}{4}x^2$	4	1	0	1	4

x	0	8
$y=-\frac{1}{2}x+4$	4	0

Vẽ đồ thị



b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) bằng phép tính

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) có dạng: $\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{2}x+4$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}=\frac{-2x}{4}+\frac{16}{4}$

$\Leftrightarrow x^2=-2x+16=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x-16=0\ (5)$

Ta có $\Delta'=1^2-1.(-16)=1+16=17>0;\sqrt{\Delta'}=\sqrt{17}$

Do $\Delta'>0$ nên phương trình (5) có 2 nghiệm phân biệt:

$x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{1}=-1+\sqrt{17};x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{1}=-1-\sqrt{17}$

+ Với $x_1=-1+\sqrt{17}$ ta có $y_1=-\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{17}\right)+4=\frac{9-\sqrt{17}}{2}$

+ Với $x_2=-1-\sqrt{17}$ ta có $y_2=-\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{17}\right)+4=\frac{9+\sqrt{17}}{2}$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (D) là: $A\left(-1+\sqrt{17};\frac{9-\sqrt{17}}{2}\right),B\left(-1-\sqrt{17};\frac{9+\sqrt{17}}{2}\right)$

Câu 3: (0,75 điểm) Rút gọn biểu thức sau: $\left(\frac{5}{\sqrt{2}+1}+\frac{14}{2\sqrt{2}-1}-\frac{6}{2-\sqrt{2}}\right).\sqrt{17+12\sqrt{2}}$

Giải:

Ta có: $\left(\frac{5}{\sqrt{2}+1}+\frac{14}{2\sqrt{2}-1}-\frac{6}{2-\sqrt{2}}\right).\sqrt{17+12\sqrt{2}}$

$$=\left[\frac{5(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{14(2\sqrt{2}+1)}{(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)}-\frac{6(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}\right].\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$$

$$=\left[\frac{5(\sqrt{2}-1)}{2-1}+\frac{14(2\sqrt{2}+1)}{8-1}-\frac{6(2+\sqrt{2})}{4-2}\right].|3+2\sqrt{2}|$$

$$=[5(\sqrt{2}-1)+2(2\sqrt{2}+1)-3(2+\sqrt{2})].(3+2\sqrt{2}) \text{ (vì } 3+2\sqrt{2}>0\text{)}$$

$$=(5\sqrt{2}-5+4\sqrt{2}+2-6-3\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$$

$$=(6\sqrt{2}-9)(3+2\sqrt{2})$$

$$=3(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)$$

$$=3(8-9)$$

$$=-3$$

Câu 4: (075 điểm) Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 240m². Nếu tăng chiều rộng 3m và giảm chiều dài 4m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính kích thước của mảnh đất?

Giải:

Gọi x (m), y (m) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật (y > x > 0)

Diện tích của hình chữ nhật ban đầu là: x.y = 240 (1) (m²)

Chiều rộng khi tăng 3 (m) là: x + 3 (m) và chiều dài giảm 4m là: y – 4 (m) (y > 4)

Diện tích của hình chữ nhật lúc sau là: (x + 3)(y – 4) (m²)

Theo đề bài, ta có phương trình: (x + 3)(y – 4) = 240

$$\Leftrightarrow xy-4x+3y-12=240$$

$$\Leftrightarrow 240-4x+3y-12-240=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3y-12}{4}(2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $\frac{3y-12}{4}.y=240$

$$\Leftrightarrow 3y^2-12y=960$$

$$\Leftrightarrow 3y^2-12y=960$$

$$\Leftrightarrow y^2-4y-320=0\ (3)$$

Ta có $\Delta'=(-2)^2-1.(-320)=4+320=324>0;\sqrt{324}=18$

Do $\Delta'>0$ nên phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt:

$$y_1=\frac{2+18}{1}=20 \text{ (nhận)};\ y_2=\frac{2-18}{1}=-16 \text{ (loại)}$$

Với $y=20\Rightarrow x=\frac{3.20-12}{4}=12$ (nhận)

Vậy miếng đất có chiều rộng là 12 (m) và chiều dài 20 (m)

Câu 5: (1,5 điểm) Cho phương trình $x^2+m-3=mx+x$ (*) (x là ẩn số)

a) Chứng tỏ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Giải:

$(*) \Leftrightarrow x^2 + m - 3 - mx - x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m - 3 = 0$

Ta có $\Delta = [-(m+1)]^2 - 4.1.(m-3) = m^2 + 2m + 1 - 4m + 12 = m^2 - 2m + 13 = (m^2 - 2m + 1) + 12$

$= (m-1)^2 + 12 \geq 12 > 0, \forall m$

Do $\Delta > 0, \forall m$ nên phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

b) Tính tổng và tích của x_1; x_2 theo m

Giải:

Theo câu a, với mọi m phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-(m+1)}{1} = m+1 \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m-3}{1} = m-3 \end{cases}$$

c) Tính biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2 - 6x_1x_2$ theo m và tìm m để A đạt giá trị nhỏ nhất

Giải:

Ta có: $A = (x_1 - x_2)^2 - 6x_1x_2$

$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1x_2$

$= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 10x_1x_2$

$= (x_1 + x_2)^2 - 10x_1x_2$

$= (m+1)^2 - 10(m-3)$ (do hệ thức Vi-ét)

$= m^2 + 2m + 1 - 10m + 30$

$= m^2 - 8m + 31$

$= (m^2 - 8m + 16) + 15$

$= (m-4)^2 + 15 \geq 15, \forall m$ (vì $(m-4)^2 \geq 0, \forall m$)

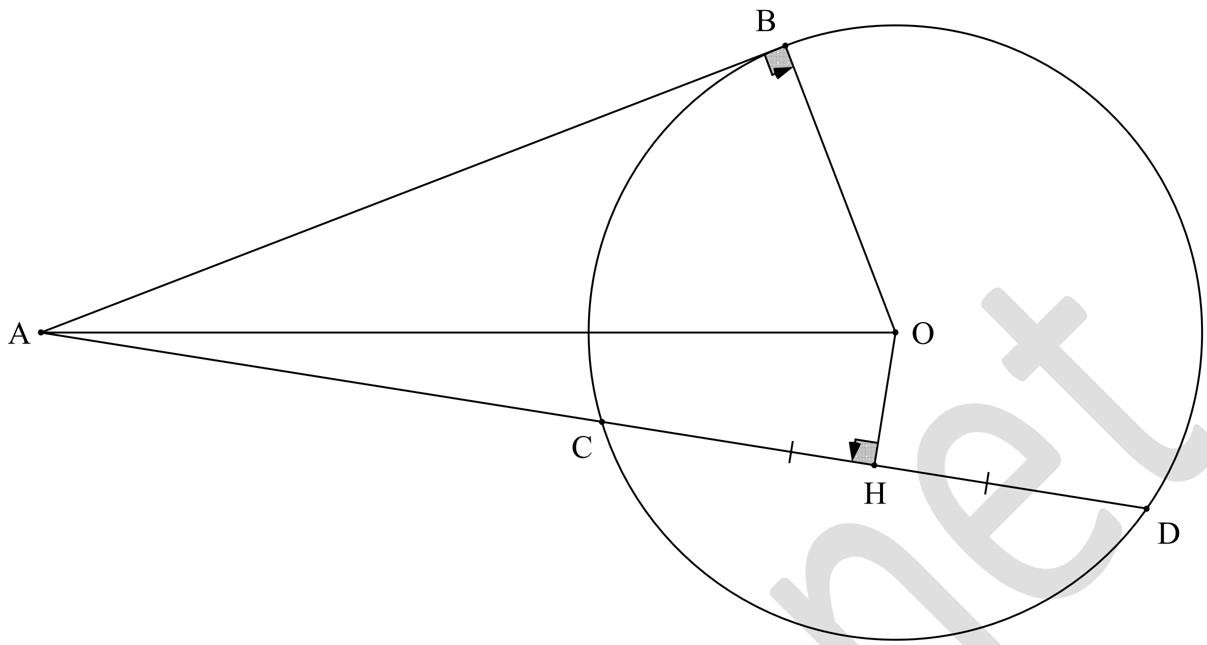
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi m – 4 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 4

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là: MinA = 15 xảy ra khi và chỉ khi m = 4

Câu 6: (3,5 điểm) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Qua A kẻ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm) và cát tuyến ACD (C nằm giữa A, D) với đường tròn (O) sao cho C và B nằm khác phía qua OA. Gọi H là trung điểm của CD

a) Chứng minh rằng: bốn điểm A, B, O, H thuộc một đường tròn

Giải:



Ta có H là trung điểm của CD và dây CD không qua tâm O

$\Rightarrow$ OH $\perp$ CD (liên hệ giữa đường kính và dây cung)

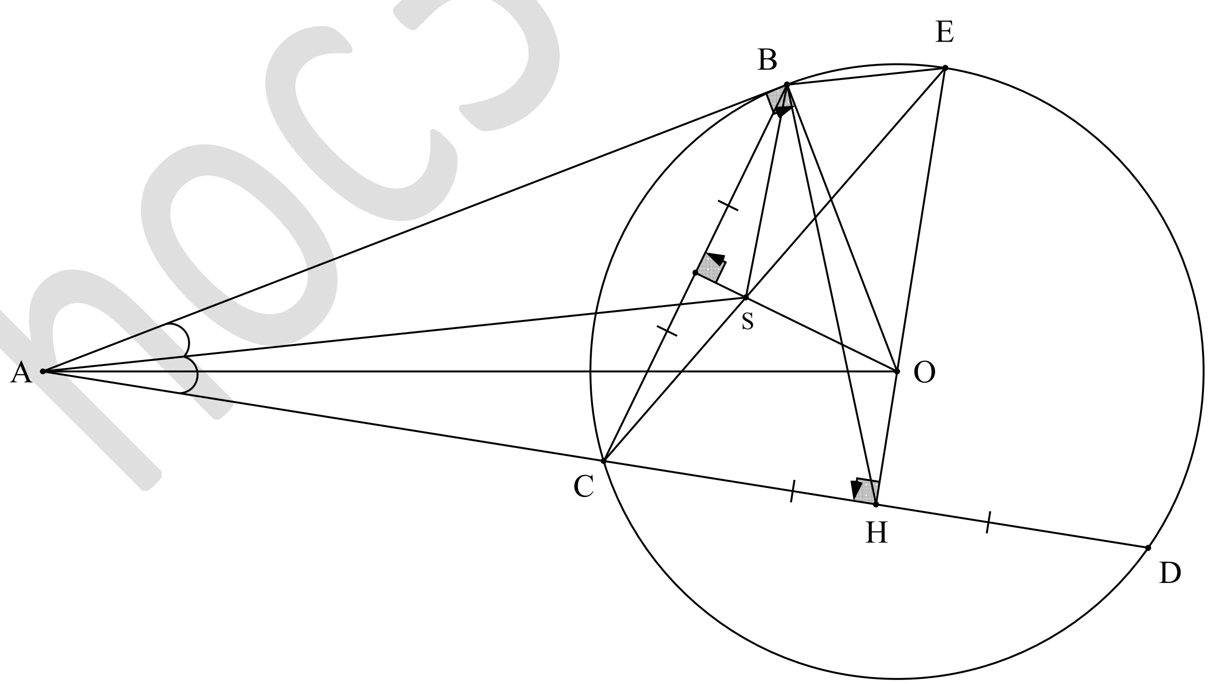
Xét tứ giác ABOH có:

$$A\hat{B}O + A\hat{H}O = 90^0 + 90^0 = 180^0$$ (vì AB là tiếp tuyến (O) và OH $\perp$ CD)

$\Rightarrow$ Tứ giác ABOH nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0)

b) Đường trung trực của BC cắt tia phân giác của $B\hat{A}C$ tại S. Gọi E là giao điểm của tia CS và (O) (E, B cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ chứa cát tuyến ACD). Chứng minh rằng: $B\hat{S}E = 2B\hat{C}E$ rồi suy ra tứ giác BEOS nội tiếp

Giải:



Ta có $B\hat{S}E = 180^0 - B\hat{S}C$ (2 góc kề bù)

$= S\hat{C}B + S\hat{B}C$ (tổng 3 góc trong ΔSBC)

$= \widehat{SCB} + \widehat{SCB} = 2\widehat{SCB}$ (vì S thuộc đường trung trực của BC nên SB = SC $\Rightarrow$ ΔSBC cân S)

$= 2\widehat{BCE}$ (đpcm)

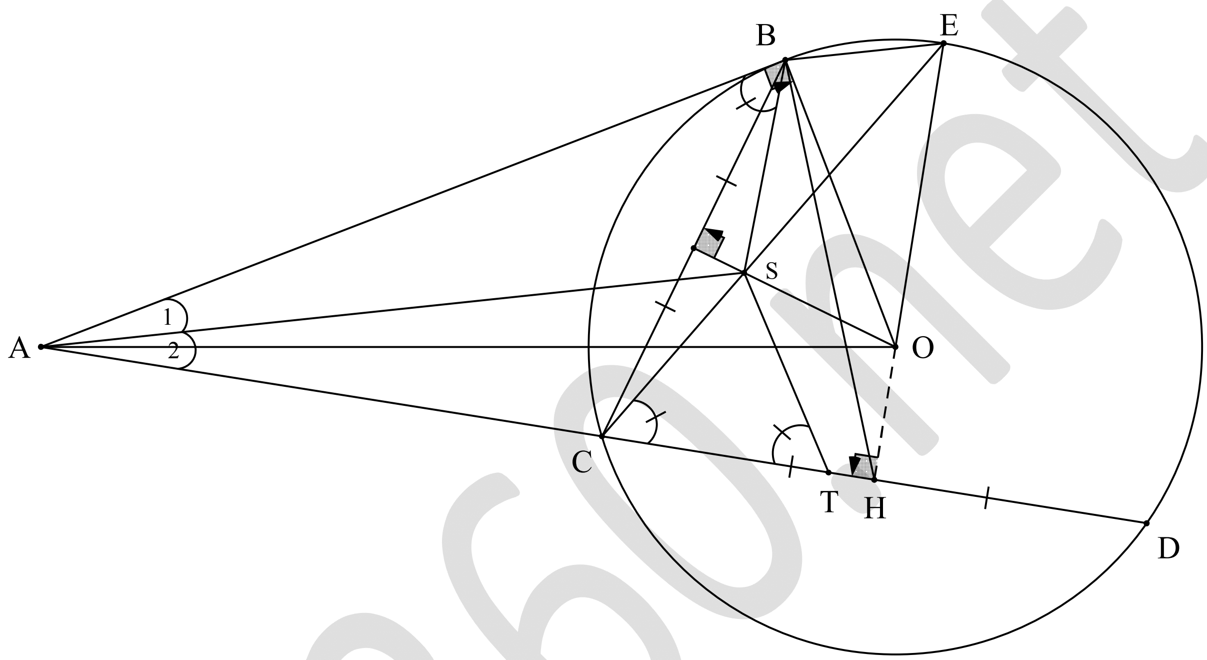
$= \widehat{BOE}$ (1) (hệ quả góc nội tiếp)

Xét tứ giác BEOS có: $\widehat{BSE} = \widehat{BOE}$ (do (1))

$\Rightarrow$ Tứ giác BEOS nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh S, O liên tiếp cùng nhìn cạnh BE dưới một góc bằng nhau)

c) Chứng minh rằng: tứ giác ABSC nội tiếp

Giải:



Gọi T là điểm thuộc AD sao cho AB = AT

Xét ΔSAB và ΔSAT có:

SA: chung

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (vì AS là phân giác của $\widehat{BAC}$)

AB = AT (do trên)

$\Rightarrow$ ΔSAB = ΔSAT (c.g.c)

$\Rightarrow$ $\widehat{SBA} = \widehat{STA}$ (2 góc tương ứng) hay $\widehat{SBA} = \widehat{STC}$ (2)

Và ST = SB (2 cạnh tương ứng)

= SC (do trên)

$\Rightarrow$ ΔSTC cân tại T

$\Rightarrow \widehat{STC} = \widehat{SCT}$ (3)

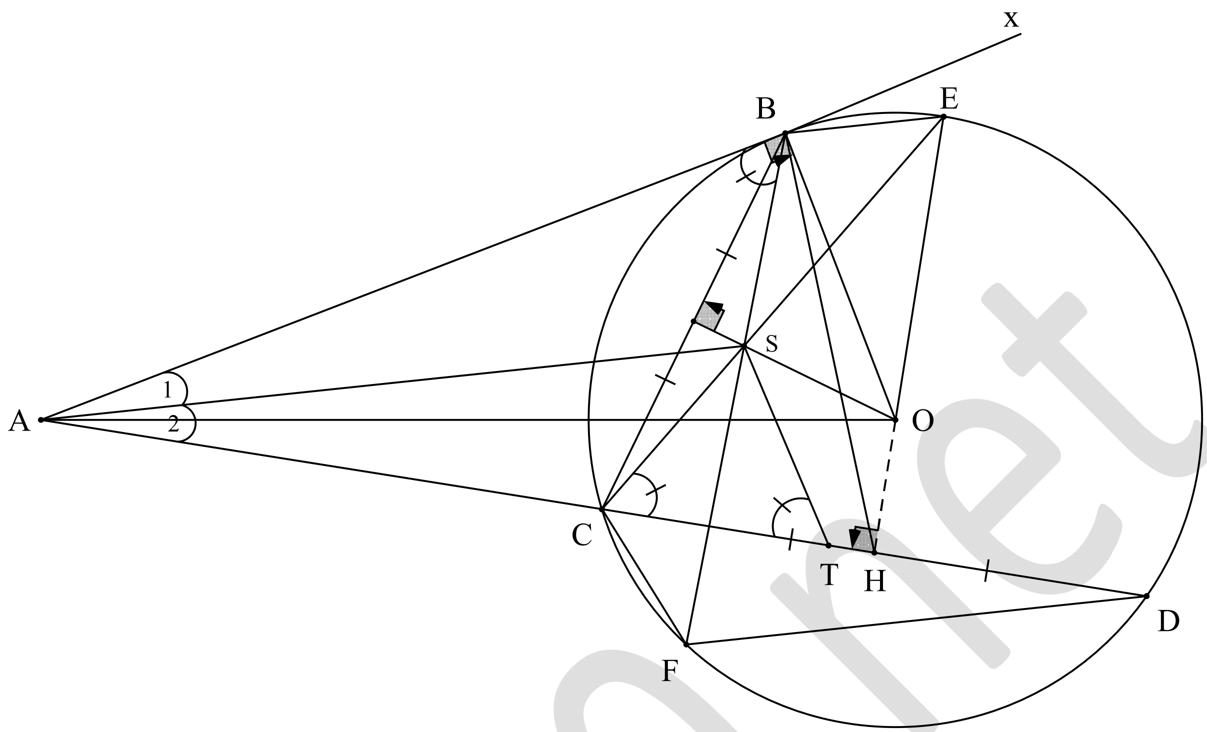
Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ $\widehat{SBA} = \widehat{SCT}$ (4)

Xét tứ giác ABSC có: $\widehat{SBA} = \widehat{SCT}$ (do (4))

$\Rightarrow$ Tứ giác ABSC nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

d) Tia BS cắt đường tròn (O) tại F. Chứng minh rằng: AS//BE//DF và H, O, E thẳng hàng

Giải:



Ta có $\hat{A}_1 = \frac{1}{2}B\hat{A}C$ (vì AS là phân giác của góc BAC)

$= \frac{1}{2}B\hat{S}E$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác ABSC nội tiếp)

$= B\hat{C}E$ (do (1))

$= E\hat{B}x$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow$ AS//BE (5) (2 góc bằng nhau và ở vị trí đồng vị: dấu hiệu nhận biết 2 đường thẳng song song)

Ta có $F\hat{D}C = F\hat{B}C$ (cùng chắn cung FC của đường tròn (O))

$= S\hat{A}C$ (cùng chắn cung SC của tứ giác ABSC nội tiếp)

$\Rightarrow$ AS//DF (6) (2 góc bằng nhau và ở vị trí so le trong: dấu hiệu nhận biết 2 đường thẳng song song)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow$ AS//BE//DF

Ta có $H\hat{O}E = H\hat{O}B + B\hat{O}E$

$= H\hat{O}B + B\hat{S}E$ (do (1))

$= H\hat{O}B + B\hat{A}H$ (góc trong bằng góc đối ngoài của tứ giác ABSC nội tiếp)

$= 180^0$ (tổng 2 góc đối của tứ giác ABOH nội tiếp)

$\Rightarrow$ H, O, E thẳng hàng