

$$\bar{z} \cdot z = \left( \frac{m}{m^2+1} \right)^2 + \left( \frac{1}{m^2+1} \right)^2 = \frac{1}{m^2+1}$$

Mà  $\bar{z} \cdot z = \frac{1}{2}$  tức  $\frac{1}{m^2+1} = \frac{1}{2}$  hay  $m^2+1=2 \Leftrightarrow m = \pm 1$ .

2. Ta có:  $z = \frac{i-m}{-i^2+2mi-m^2} = \frac{-1}{i-m} \Rightarrow z-1 = \frac{1-m+i}{m-i}$

$$|z-1| = \frac{|1-m+i|}{|m-i|} = \sqrt{\frac{m^2-2m+2}{m^2+1}}$$

$$\Rightarrow |z-1| \leq k \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ \frac{m^2-2m+2}{m^2+1} \leq k^2 \end{cases} \cdot \text{Xét hàm số } f(m) = \frac{m^2-2m+2}{m^2+1}$$

Ta có:  $f'(m) = \frac{2(m^2-m-1)}{(m^2+1)^2} \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Lập bảng biến thiên ta có  $\min f(m) = f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow k^2 \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow k \geq \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Vậy  $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  là giá trị phải tìm.

## DỤNG CỦA SỐ PHỨC

**Ví dụ 12** Tính  $\cos \frac{\pi}{5}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $z = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ , thì  $z$  là nghiệm của phương trình  $z^5 - 1 = 0$ .

Ta có  $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$  và  $z \neq 1$  nên  $z$  là nghiệm của phương trình

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Vì  $z=0$  không là nghiệm nên chia cả hai vế cho  $z^2$ :

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, z + \frac{1}{z} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

**Truy cập website: [hoc360.net](http://hoc360.net) để tải tài liệu đề thi miễn phí**

Chú ý rằng  $z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{\pi}{5} > 0$  nên ta có  $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ .

**Ví dụ 13** Cho  $a, b, c$  là các số thực thoả mãn  $\sin a + \sin b + \sin c = 0$  và  $\cos a + \cos b + \cos c = 0$ .

Chứng minh rằng  $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0$  và  $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0$

**Lời giải.**

Đặt  $z_1 = \cos a + i\sin a; z_2 = \cos b + i\sin b; z_3 = \cos c + i\sin c$ , ta có :

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \text{ và } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, \text{ nên } \frac{1}{z_k} = \bar{z}_k \text{ (k = 1; 2; 3)}.$$

Vì thế:  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)$

$$\begin{aligned} &= 0^2 - 2z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = -2z_1z_2z_3(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \\ &= -2z_1z_2z_3\overline{(z_1 + z_2 + z_3)} = 0 \end{aligned}$$

Nên  $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + i(\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c) = 0$ . Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Câu 1.** Phương trình  $z^2 + |z| = 0$  có mấy nghiệm trong tập số phức:

- A. Có 1 nghiệm      B. Có 2 nghiệm      C. Có 3 nghiệm      D. Có 4 nghiệm

**Câu 2.** Gọi  $z_1$  và  $z_2$  là các nghiệm của phương trình  $z^2 - 4z + 9 = 0$ . Gọi M, N là các điểm biểu diễn của  $z_1$  và  $z_2$  trên mặt phẳng phức. Khi đó độ dài của MN là:

- A.  $MN = 4$       B.  $MN = 5$       C.  $MN = -2\sqrt{5}$       D.  $MN = 2\sqrt{5}$

**Câu 3.** Gọi  $z_1$  và  $z_2$  là các nghiệm của phương trình  $z^2 - 4z + 9 = 0$ . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của  $z_1, z_2$  và số phức  $k = x + iy$  trên mặt phẳng phức. Khi đó tập hợp điểm P trên mặt phẳng phức để tam giác MNP vuông tại P là:

- A. Đường thẳng có phương trình  $y = x - \sqrt{5}$   
B. Là đường tròn có phương trình  $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$   
C. Là đường tròn có phương trình  $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$ , nhưng không chứa M, N.  
D. Là đường tròn có phương trình  $x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0$ , nhưng không chứa M, N.

**Câu 4.** Gọi  $z_1$  và  $z_2$  là các nghiệm của phương trình  $z + \frac{1}{z} = -1$ . Giá trị của  $P = z_1^3 + z_2^3$  là:

**Truy cập website: [hoc360.net](http://hoc360.net) để tải tài liệu đề thi miễn phí**

A.  $P = 0$

B.  $P = 1$

C.  $P = 2$

D.  $P = 3$

**Câu 5.** Biết số phức  $z$  thỏa phương trình  $z + \frac{1}{z} = 1$ . Giá trị của  $P = z^{2016} + \frac{1}{z^{2016}}$  là:

A.  $P = 0$

B.  $P = 1$

C.  $P = 2$

D.  $P = 3$

**Câu 6.** Tập nghiệm của phương trình  $z^4 - 2z^2 - 8 = 0$  là:

A.  $\{\pm\sqrt{2}; \pm 2i\}$

B.  $\{\pm\sqrt{2}i; \pm 2\}$

C.  $\{\pm 2; \pm 4i\}$

D.  $\{\pm 2; \pm 4i\}$

**Câu 7.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn:  $\bar{z} = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{1 - i}$ . Tìm môđun của  $\bar{z} + iz$ .

A.  $8\sqrt{2}$

B.  $4\sqrt{2}$

C. 8

D. 4

**Câu 8.** Tập nghiệm của phương trình:  $(z^2 + 9)(z^2 - z + 1) = 0$  là:

A.  $\left\{ \pm 3; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right\}$

B.  $\left\{ \pm 3; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \right\}$

C.  $\left\{ \pm 3; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2} \right\}$

D.  $\left\{ 3; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2} \right\}$

**Câu 9.** Gọi  $z_1$  và  $z_2$  là các nghiệm của phương trình  $z^2 - 2z + 10 = 0$ . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của  $z_1, z_2$  và số phức  $k = x + iy$  trên mặt phẳng phức. Để tam giác MNP đều thì số phức  $k$  là:

A.  $k = 1 + \sqrt{27}$  hay  $k = 1 - \sqrt{27}$

B.  $k = 1 + \sqrt{27}i$  hay  $k = 1 - \sqrt{27}i$

C.  $k = \sqrt{27} - i$  hay  $k = \sqrt{27} + i$

D. Một đáp số khác.

**Câu 10.** Trong C, phương trình  $(2 - i)\bar{z} - 4 = 0$  có nghiệm là:

A.  $z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$

B.  $z = \frac{4}{5} - \frac{8}{5}i$

C.  $z = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}i$

D.  $z = \frac{7}{5} - \frac{3}{5}i$

**Câu 11.** Hãy chọn một đáp án là nghiệm của phương trình sau trên tập số phức

$$2z^4 + 3z^2 - 5 = 0$$

A.  $z_1 = 1; z_2 = -1; z_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}i; z_4 = -\sqrt{\frac{5}{2}}i$

B.  $z_1 = i; z_2 = -1; z_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}i; z_4 = -\sqrt{\frac{5}{2}}i$

C.  $z_1 = 1; z_2 = -i; z_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}i; z_4 = -\sqrt{\frac{5}{2}}i$

D.  $z_1 = 1; z_2 = -1; z_3 = \sqrt{5}i; z_4 = -\sqrt{\frac{5}{2}}i$

**Câu 12.** Trong C, phương trình  $\frac{4}{z+1} = 1-i$  có nghiệm là:

- A.  $z = 2 - i$       B.  $z = 3 + 2i$       C.  $z = 5 - 3i$       D.  $z = 1 + 2i$

**Câu 13.** Trong C, phương trình  $(iz)(\bar{z} - 2 + 3i) = 0$  có nghiệm là:

- A.  $\begin{cases} z = i \\ z = 2 - 3i \end{cases}$       B.  $\begin{cases} z = 2i \\ z = 5 + 3i \end{cases}$       C.  $\begin{cases} z = -i \\ z = 2 + 3i \end{cases}$       D.  $\begin{cases} z = 3i \\ z = 2 - 5i \end{cases}$

**Câu 14.** Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức  $z_1 = -1 + 3i; z_2 = 1 + 5i; z_3 = 4 + i$ . Số phức biểu diễn điểm D sao cho tứ giác ABCD là một hình bình hành là:

- A.  $2 + 3i$       B.  $2 - i$       C.  $2 + 3i$       D.  $3 + 5i$

**Câu 15.** Tìm số phức  $z$ , biết:  $|z| + z = 3 + 4i$

- A.  $z = -\frac{7}{6} + 4i$       B.  $z = -\frac{7}{6} - 4i$       C.  $z = \frac{7}{6} - 4i$       D.  $z = -7 + 4i$

**Câu 16.** Cho số phức  $z = x + yi \neq 1 (x, y \in R)$ . Phần ảo của số phức  $\frac{z+1}{z-1}$  là:

- A.  $\frac{-2x}{(x-1)^2 + y^2}$       B.  $\frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2}$       C.  $\frac{xy}{(x-1)^2 + y^2}$       D.  $\frac{x+y}{(x-1)^2 + y^2}$

**Câu 17.** Cho hai số phức  $z = x + yi$  và  $u = a + bi$ . Nếu  $z^2 = u$  thì hệ thức nào sau đây là đúng:

- A.  $\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ 2xy = b^2 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = b^2 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x - y = a \\ 2xy = b \end{cases}$

**Câu 18.** Cho các số phức:  $z_1 = 3i; z_2 = -1 - 3i; z_3 = m - 2i$ . Tập giá trị tham số  $m$  để số phức  $z_3$  có mô đun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là

- A.  $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$       B.  $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$   
C.  $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$       D.  $m = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

**Câu 19.** Cho các số phức:  $z_1 = 2i; z_2 = m - 3 - 2i; z_3 = 1 - 2i$ . Tập giá trị tham số  $m$  để số phức  $z_2$  có mô đun lớn nhất trong 3 số phức đã cho là

- A.  $(2; 4)$       B.  $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$       C.  $[2; 4]$       D.  $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$

**Truy cập website: [hoc360.net](http://hoc360.net) để tải tài liệu đề thi miễn phí**

**Câu 20.** Cho số phức  $z = (1 - m)(1 + i)$ . Giá trị của tham số  $m$  để số phức  $z$  có mô đun nhỏ nhất là

- A. 0                      B. 1                      C. -1                      D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Câu 21.** Cho số phức  $z = 2 - m + (m - 3)i$ . Điểm biểu diễn trên mặt phẳng  $(Oxy)$  của số phức  $z$  có mô đun nhỏ nhất có tọa độ là

- A.  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$                       B.  $(2; -3)$                       C.  $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$                       D.  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

**Câu 22.** Biết điểm biểu diễn của số phức  $z$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  thuộc Elip:

$16x^2 + 25y^2 = 400$ . Giá trị lớn nhất của mô đun số phức  $z$  là

- A.  $\frac{\sqrt{391}}{4}$                       B. 5                      C. 25                      D.  $\frac{391}{16}$

**Câu 23.** Trong các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ . Số phức có mô đun nhỏ nhất là

- A.  $2 - 2i$                       B.  $2i$                       C.  $-2 + 2i$                       D.  $2 + 2i$

**Câu 24.** Trong các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z - 2 + 2i| = |z - 2i|$ . Mô đun nhỏ nhất của số phức  $z$  là

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       B.  $\frac{\sqrt{145}}{10}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{1}{5}$

**Câu 25.** Biết rằng số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $u = (z + 3 - i)(\bar{z} + 1 + 3i)$  là một số thực. Giá trị nhỏ nhất của  $|z|$  là

- A.  $\sqrt{10}$                       B.  $\sqrt{38}$                       C.  $2\sqrt{2}$                       D. 1

**Câu 26.** Phần thực của số phức  $z = (1 - \sqrt{3}i)^2 + (1 + \sqrt{3}i)^2$  là

- A. -1                      B. 8                      C.  $-4\sqrt{3}i$                       D. 1

**Câu 27.** Phần ảo của số phức  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$  là

- A.  $i$                       B.  $-i$                       C.  $1$                       D.  $-1$

**Câu 28.** Cho số phức  $z = m^2 + mi - (1 - 2m)(1 - i)$ , biết phần thực của số phức  $z$  là 2. Giá trị của tham số  $m$  là

- A. 1 hoặc  $-3$               B.  $-1$                       C.  $1$                       D. 1 hoặc  $-1$

**Câu 29.** Phần ảo của số phức  $z = (7 - 3i)^2 + \frac{6-i}{3+2i}$  là:

- A.  $\frac{-561}{13}$                       B.  $\frac{561}{13}$                       C.  $\frac{13}{561}$                       D.  $\frac{-13}{561}$

**Câu 30:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn:  $z + 3\bar{z} = (2 + i)^3(2 - i)$  Phần ảo của số phức  $z$  là

- A.  $-10$ .                      B.  $\frac{15}{4}$ .                      C.  $10$ .                      D.  $-10i$ .

**Câu 31:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$ . Phần thực và phần ảo của  $z$  là

- A. phần thực  $-\frac{1}{3}$  và phần ảo  $\frac{1}{3}$ .                      B. phần thực  $\frac{1}{3}$  và phần ảo  $-\frac{1}{3}i$ .  
C. phần thực  $\frac{1}{3}$  và phần ảo  $\frac{1}{3}$ .                      D. phần thực  $\frac{1}{3}$  và phần ảo  $-\frac{1}{3}$ .

**Câu 32:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn:  $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^3(1 - \sqrt{2}i)$ . Phần thực của số phức  $z$  là

- A.  $-5$ .                      B.  $-5i$ .                      C.  $5$ .                      D.  $5i$ .

**Câu 33:** Cho số phức  $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$ . Phần thực và phần ảo của  $z$  là

- A. phần thực 2 và phần ảo  $-2$ .                      B. phần thực  $-2$  và phần ảo 2.  
C. phần thực 2 và phần ảo 2.                      D. phần thực 2 và phần ảo  $2i$ .

**Truy cập website: [hoc360.net](http://hoc360.net) để tải tài liệu đề thi miễn phí**

**Câu 34.** Cho số phức  $z = \frac{1+mi}{1-2i}$ . Giá trị của tham số  $m$  để số phức  $z$  là số thực là

- A.  $\frac{3}{2}$                       B.  $-1$                       C.  $4$                       D.  $1$

**Câu 35.** Cho hai số phức  $z_1 = 1+2i$ ;  $z_2 = 2-3i$ . Xác định phần thực và phần ảo của số phức  $z_1 - 2z_2$

- A.  $3$                       B.  $-3$                       C.  $8$                       D.  $-8$

**Câu 36 :** Tìm phần thực và phần ảo của số phức  $z$  thỏa  $|z| = \sqrt{2}$  và  $z^2$  là số thuần ảo

- A.  $\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \end{cases}$                       B.  $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$                       C.  $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$                       D.  $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

**Câu 37 :** Tìm phần ảo của số phức  $z$ , biết  $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2 \cdot (1 - \sqrt{2}i)$

- A.  $5$                       B.  $-5$                       C.  $\sqrt{2}$                       D.  $-\sqrt{2}$

**Câu 38 :** Tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện:  $|z - i| = 1$  là:

- A. Một đường thẳng    B. Một đường tròn    C. Một đoạn thẳng    D. Một hình vuông

**Câu 39:** Cho phương trình  $z^2 + bz + c = 0$ . Nếu phương trình nhận  $z = 1+i$  làm một nghiệm thì  $b$  và  $c$  bằng:

- A.  $b = 3, c = 5$                       B.  $b = 1, c = 3$                       C.  $b = 4, c = 3$                       D.  $b = -2, c = 2$

**Câu 40:** Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức  $z_1 = -1+3i$ ,  $z_2 = 1+5i$ ,  $z_3 = 4+i$ . Tìm điểm biểu diễn số phức D sao cho tứ giác ABCD là một hình bình hành là:

- A.  $2+i$                       B.  $2-i$                       C.  $5+6i$                       D.  $3+4i$

**Câu 41:** Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức  $z_1 = -1+3i$ ;  $z_2 = -3-2i$ ,  $z_3 = 4+i$ . Tam giác ABC là:





**Truy cập website: [hoc360.net](http://hoc360.net) để tải tài liệu đề thi miễn phí**

B. Tập hợp các điểm M là một đường thẳng:  $x+y-2=0$

C. Tập hợp các điểm M là một đường tròn có tâm là gốc tọa độ O và bán kính là 4

D. Tập hợp các điểm M là một đường thẳng:  $x+y-4=0$

**Câu 48.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn:  $2|z-2+3i|=|2i-1-2\bar{z}|$ . Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức  $z$  là:

A. Một đường thẳng có phương trình:  $20x-16y-47=0$

B. Một đường thẳng có phương trình:  $20x+16y+47=0$

C. Một đường có phương trình:  $3y^2+20x+2y-20=0$

D. Một đường thẳng có phương trình:  $-20x+32y+47=0$

**Câu 49:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|zi-(2+i)|=2$  là:

A.  $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

B.  $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

C.  $(x-1)^2+(y+4)^2=0$

D.  $x^2+y^2-2x+4y+3=0$

**Câu 50:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn:  $\bar{z}(1+2i)=7+4i$ . Tính  $|\omega|=|z+2i|$ .

A.  $|\omega|=5$ .

B.  $|\omega|=3$ .

C.  $|\omega|=\sqrt{5}$ .

D.  $|\omega|=\sqrt{29}$ .

**Câu 51:** Cho hai số phức  $z_1=(1-i)(2i-3)$ ,  $z_2=(-i-1)(3+2i)$ . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A.  $z_1.z_2 \in \mathbb{R}$ .

B.  $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$ .

C.  $z_1.z_2 \in \mathbb{R}$ .

D.  $z_1-z_2 \in \mathbb{R}$ .

**Câu 52.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $\frac{z}{1-2i}+\bar{z}=2$ . Phần thực  $a$  của số phức  $w=z^2-z$  là:

A.  $a=1$ .

B.  $a=3$ .

C.  $a=2$ .

D.  $a=-5$ .