# CHỦ ĐỀ 6. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

## I. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA

### 1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$ có đồ thị $(C)$ và hàm số bậc nhất $y = kx + n$ có đồ thị $d$.

Lập phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $d$:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = kx + n \quad (1)$

Phương trình $(1)$ là phương trình bậc ba nên có ít nhất một nghiệm. Ta có 2 trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Phương trình $(1)$ có *"nghiệm đẹp"* $x_0$.

  Thường thì đề hay cho nghiệm $x_0 = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;...$ thì khi đó:

  $$(1) \Leftrightarrow (x - x_0)\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - x_0 = 0 \\ Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

  Khi đó:

  + $(C)$ và $d$ có ba giao điểm $\Leftrightarrow$ phương trình $(1)$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm $x_0$. (*Đây là trường hợp thường gặp*)

  + $(C)$ và $d$ có hai giao điểm $\Leftrightarrow$ phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm $x_0$ hoặc phương trình $(2)$ có nghiệm kép khác $x_0$.

  + $(C)$ và $d$ có một giao điểm $\Leftrightarrow$ phương trình $(1)$ có một nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $(2)$ vô nghiệm hoặc phương trình $(2)$ có nghiệm kép là $x_0$.

- **Trường hợp 2:** Phương trình $(1)$ không thể nhẩm được *"nghiệm đẹp"* thì ta biến đổi phương trình $(1)$ sao cho hạng tử chứa $x$ tất cả nằm bên vế trái, các hạng tử chứa tham số $m$ nằm bên vế phải, nghĩa là $(1) \Leftrightarrow f(x) = g(m)$.

  Ta khảo sát và vẽ bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ và biện luận số giao điểm của $(C)$ và $d$ theo tham số $m$.

### 2. CÁC VÍ DỤ

**Ví dụ 1:** Tìm giao điểm của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1$.

**Hướng dẫn giải**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+2x+1=1 \Leftrightarrow x^3-3x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy có ba giao điểm $A(0;1), B(1;1), C(2;1)$.

**Ví dụ 2:** Cho hàm số $y=mx^3-x^2-2x+8m$ có đồ thị là $(C_m)$. Tìm $m$ đồ thị $(C_m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

**Hướng dẫn giải**

Phương trình hoành độ giao điểm $mx^3-x^2-2x+8m=0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left[mx^2-(2m+1)x+4m\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ mx^2-(2m+1)x+4m=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

$(C_m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = -12m^2+4m+1>0 \\ 12m+2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{6}<m<\frac{1}{2} \\ m \neq -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{6}<m<\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $m \in \left(-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Ví dụ 3:** Cho hàm số $y=2x^3-3mx^2+(m-1)x+1$ có đồ thị $(C)$. Tìm $m$ để đường thẳng $d: y=-x+1$ cắt đồ thị $(C)$ tại ba điểm phân biệt.

**Hướng dẫn giải**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $d$:

$$2x^3-3mx^2+(m-1)x+1=-x+1 \Leftrightarrow x\left(2x^2-3mx+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2-3mx+m=0 \, (*) \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 8m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{8}{9}; +\infty\right).$$

Vậy $m \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{8}{9}; +\infty\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Ví dụ 4:** Tìm $m$ để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

**Hướng dẫn giải**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

$$x^3 + mx + 2 = 0.$$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, nên phương trình tương đương với

$$m = -x^2 - \frac{2}{x} \qquad (x \neq 0)$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 - \frac{2}{x}$ với $x \neq 0$, suy ra $f'(x) = -2x + \frac{2}{x^2} = \frac{-2x^3 + 2}{x^2}$. Vậy

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ | $\nearrow$ | $-3$ | $\searrow$ | |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow m > -3$. Vậy $m > -3$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Ví dụ 5:** Tìm $m$ để đồ thị $(C)$ của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

**Hướng dẫn giải**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x = -m \quad (1)$$

Phương trình $(1)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đường $(C): y = x^3 - 3x^2 - 9x$ và đường thẳng $d: y = -m$. Số nghiệm của $(1)$ bằng số giao điểm của $(C)$ và $d$.

Khảo sát và vẽ bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-27$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $(1)$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -27 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < 27.$$

**Ví dụ 6:** Gọi $d$ là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0)$ với hệ số góc $k$ $(k \in \mathbb{R})$. Tìm $k$ để đường thẳng $d$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại ba điểm phân biệt $A, B, C$ và tam giác $OBC$ có diện tích bằng $1$ ($O$ là gốc tọa độ).

**Hướng dẫn giải**

Đường thẳng $d$ đi qua $A(-1;0)$ và có hệ số góc $k$ nên có dạng $y = k(x+1)$, hay

$$kx - y + k = 0.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $d$ là:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = kx + k \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - 4x + 4 - k\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ g(x) = x^2 - 4x + 4 - k = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

$d$ cắt $(C)$ tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác $-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \neq 9 \end{cases}.$$

Khi đó $g(x)=0\Leftrightarrow x=2-\sqrt{k};x=2+\sqrt{k}$. Vậy các giao điểm của hai đồ thị lần lượt là

$$A(-1;0),\ B\left(2-\sqrt{k};3k-k\sqrt{k}\right),\ C\left(2+\sqrt{k};3k+k\sqrt{k}\right).$$

Tính được $BC=2\sqrt{k}\sqrt{1+k^2}$, $d(O,BC)=d(O,d)=\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$. Khi đó

$$S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}.\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}.2\sqrt{k}.\sqrt{1+k^2}=1\Leftrightarrow |k|\sqrt{k}=1\Leftrightarrow k^3=1\Leftrightarrow k=1.$$

Vậy $k=1$ thỏa yêu cầu bài toán.