CHỦ ĐỀ 4. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình mũ cơ bản $a^x = b\ (a > 0,\ a \neq 1)$.

- Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.
- Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

2. Biến đổi, quy về cùng cơ số

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow a = 1 \text{ hoặc } \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}.$$

3. Đặt ẩn phụ

$$f\left[a^{g(x)}\right] = 0 \quad (0 < a \neq 1) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}.$$

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$
- $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)},\ t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

4. Logarit hóa

- Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1,\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.
- Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$

  hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a = g(x)$.

5. Giải bằng phương pháp đồ thị

- Giải phương trình: $a^x = f(x)\ (0 < a \neq 1)$. $\quad (*)$
- Xem phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = a^x\ (0 < a \neq 1)$ và $y = f(x)$. Khi đó ta thực hiện hai bước:

➢ **Bước 1**. Vẽ đồ thị các hàm số $y = a^x\ (0 < a \neq 1)$ và $y = f(x)$.

➢ **Bước 2**. Kết luận nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của hai đồ thị.

6. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

- **Tính chất 1.** Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $\left(a;b\right)$ thì số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=k$ trên $\left(a;b\right)$ không nhiều hơn một và $f\left(u\right)=f\left(v\right)\Leftrightarrow u=v,\quad \forall u,v\in\left(a;b\right)$.
- **Tính chất 2.** Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) ; hàm số $y=g\left(x\right)$ liên tục và luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ không nhiều hơn một.
- **Tính chất 3.** Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì bất phương trình $f\left(u\right)>f\left(v\right)\Leftrightarrow u>v\ \left(\text{hoac } u<v\right),\quad \forall u,v\in D$.

7. Sử dụng đánh giá

- Giải phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$.
- Nếu ta đánh giá được $\begin{cases} f\left(x\right)\ge m \\ g\left(x\right)\le m \end{cases}$ thì $f\left(x\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow\begin{cases} f\left(x\right)=m \\ g\left(x\right)=m \end{cases}$.

8. Bất phương trình mũ

- Khi giải bất phương trình mũ, ta cần chú ý đến tính đơn điệu của hàm số mũ.

$$\boxed{a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>1 \\ f\left(x\right)>g\left(x\right)\end{cases}\\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f\left(x\right)<g\left(x\right)\end{cases}\end{array}\right.}$$. Tương tự với bất phương trình dạng: $\left[\begin{array}{l} a^{f(x)}\ge a^{g(x)} \\ a^{f(x)}<a^{g(x)} \\ a^{f(x)}\le a^{g(x)}\end{array}\right.$

- Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì: $\boxed{a^M>a^N\Leftrightarrow\left(a-1\right)\left(M-N\right)>0}$.
- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình mũ:
  + Đưa về cùng cơ số.

+ Đặt ẩn phụ.
+ Sử dụng tính đơn điệu: $\begin{cases} y = f(x) \text{ đồng biến trên } D \text{ thì: } f(u) < f(v) \Rightarrow u < v \\ y = f(x) \text{ nghịch biến trên } D \text{ thì: } f(u) < f(v) \Rightarrow u > v \end{cases}$