I – Kiến thức cần nhớ

— Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = f(x)$ **tại** điểm $M(x_o; y_o)$ có dạng:

$$\Delta: \boxed{y = k(x - x_o) + y_o}$$

$\downarrow$ ① $\downarrow$ ② $\downarrow$ ③

Với $k = y'(x_o)$ là hệ số góc tiếp tuyến.

¾ ¾ ¾ ***Để viết phương trình tiếp tuyến Δ, ta cần tìm ba thành phần x_o, y_o, k***

— Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ ***tiếp xúc nhau*** $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm ***(nhớ: "hàm = hàm, đạo = đạo")***

II – Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến thường gặp

① Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y' \Rightarrow y'(x_o)$.

— Do phương trình tiếp tuyến Δ có hệ số góc k $\Rightarrow y'(x_o) = k$ (i)

— Giải (i) tìm được $x_o \longrightarrow y_o = f(x_o) \longrightarrow \Delta: y = k(x - x_o) + y_o$.

✍ **Lưu ý**. Hệ số góc $k = y'(x_o)$ của tiếp tuyến Δ thường cho gián tiếp như sau:

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta \,//\, d: y = ax + b \Rightarrow k = a$.

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta \perp d: y = ax + b \Rightarrow k = -\dfrac{1}{a}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với trục hoành góc $\alpha \Rightarrow |k| = \tan\alpha$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với $d: y = ax + b$ góc $\alpha \Rightarrow \left|\dfrac{k - a}{1 + k.a}\right| = \tan\alpha$

② Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua (kẻ từ) điểm $A(x_A; y_A)$

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y_o = f(x_o)$ và $k = y'(x_o)$ theo x_o.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_o; y_o)$ là $\Delta: y = k(x - x_o) + y_o$.

— Do $A(x_A; y_A) \in \Delta \Rightarrow y_A = k(x_A - x_o) + y_o$ (i)

— Giải phương trình (i) $\longrightarrow x_o \longrightarrow y_o$ và $k \longrightarrow$ phương trình Δ.

③ Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích S cho trước

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k = y'(x_o)$ theo x_o.

— Đề cho $\left[\begin{array}{ll} \Delta OAB \text{ vuông cân} \Leftrightarrow \Delta \text{ tạo với Ox một góc } 45^o \text{ và } O \notin \Delta & (i) \\ S_{\Delta OAB} = S \Leftrightarrow OA.OB = 2S & (ii) \end{array}\right.$

— Giải (i) hoặc (ii) $\longrightarrow x_o \longrightarrow y_o; k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ.

④ Tìm những điểm trên đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ mà từ đó vẽ được $1, 2, 3, ..., n$ tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$

— Gọi $M(x_M; y_M) \in d: ax + by + c = 0$ (sao cho có một biến x_M trong M)

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (i) \\ f'(x)=k & (ii) \end{cases}$

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x)=f'(x).(x-x_M)+y_M$ (iii)

— Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ $M=$ số nghiệm x của (iii).

⑤ Tìm những điểm $M(x_M;y_M)$ mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y=f(x)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y=k(x-x_M)+y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (i) \\ f'(x)=k & (ii) \end{cases}$

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x)=f'(x).(x-x_M)+y_M$ (iii)

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với $(C) \Leftrightarrow (iii)$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

— Hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2=-1 \Leftrightarrow y'(x_1).y'(x_2)=-1$.

✍ **<u>Lưu ý</u>**.

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì $\begin{cases} (iii): \\ f(x_1).f(x_2)<0. \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

— Đối với bài toán tìm điểm $M \in (C): y=f(x)$ sao cho tại đó tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng d cho trước, ta chỉ cần gọi $M(x_o;y_o)$ và Δ là tiếp tuyến với $k=f'(x_o)$. Rồi áp dụng $k=f'(x_o)=k_d$ nếu cho song song và $f'(x_o).k_d=-1$ nếu cho vuông góc $\Rightarrow x_o \Rightarrow y_o \Rightarrow M(x_o;y_o)$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Cho đường cong $(C): y=f(x)=x^3-3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong các trường hợp sau:

a) Tại điểm $M_0(1;-2)$.

b) Tại điểm thuộc (C) và có hoành độ $x_0=-1$.

c) Tại giao điểm của (C) với trục hoành .

d) Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;-4)$.

LỜI GIẢI

Ta có $f'(x)=3x^2-6x$

a). Ta có $f'(x_0)=f'(1)=-3$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1;-2)$: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=-3(x-1)-3 \Leftrightarrow y=-3x$

b). Ta có $x_0=-1 \Rightarrow y_0=-4, f'(x_0)=9$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $N(-1;-4)$ là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$y = 9(x+1) - 4 \Leftrightarrow y = 9x + 5$.

c). Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành: $x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0, f'(x_0) = f'(0) = 0$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $(0;0)$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = 0$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 0, f'(x_0) = f'(3) = 9$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $(3;0)$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y = 9(x-3) \Leftrightarrow y = 9x - 27$.

d). Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của phương trình tiếp tuyến d đi qua điểm A

Vì điểm $(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = x_0^3 - 3x_0^2$, và $f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$

Phương trình d: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2$

Vì $A(-1;-4) \in d$ nên: $(3x_0^2 - 6x_0)(-1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 = -4$

$\Leftrightarrow 2x_0^3 - 6x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \vee x_0 = -1$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -4, f'(2) = 0$, phương trình tiếp tuyến $y = -4$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -4, f'(-1) = 9$, phương trình tiếp tuyến $y = 9(x+1) - 4 \Leftrightarrow y = 9x + 5$

Cho đường cong $(C): y = \dfrac{3x+1}{1-x}$.

a). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): x - 4y - 21 = 0$.

b). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 2x + 2y - 9 = 0$.

c). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng :

$(d): x - 2y + 5 = 0$ một góc 30^0.

Tập xác định $D = R \setminus \{1\}$. Ta có $y' = f'(x) = \dfrac{4}{(1-x)^2}$

a). Có $(d): x - 4y - 21 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{21}{4} \Rightarrow k_d = \dfrac{1}{4}$

Vì tiếp tuyến song song với d nên $k_{tt} = k_d = \dfrac{1}{4}$.

Gọi $M(x_0, y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0) = k_{tt} \Leftrightarrow \dfrac{4}{(1-x_0)^2} = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow x_0 = 5 \vee x_0 = -3$

Với $x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = -4$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}(x-5) - 4 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{21}{4}$ (loại, vì trùng với d).

Với $x_0 = -3 \Rightarrow y = -2$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}(x+3) - 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{4}$.

b). $(\Delta): 2x+2y-9=0 \Leftrightarrow y=-x+\frac{9}{2} \Rightarrow k_\Delta=-1$

Vì tiếp tuyến vuông góc với Δ nên, $k_{tt}.k_\Delta=-1 \Rightarrow k_{tt}=1$

Gọi $N(x_0,y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0)=k_{tt} \Leftrightarrow \frac{4}{(1-x_0)^2}=1$

$\Leftrightarrow (x_0-1)^2=4 \Leftrightarrow x_0=3 \vee x_0=-1$.

Với $x_0=3 \Rightarrow y=-5$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=-1(x-3)-5 \Leftrightarrow y=-x-2$

Với $x_0=-1 \Rightarrow y=-1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=-1(x+1)-1 \Leftrightarrow y=-x-2$.

c). $(d): x-2y+5=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \Rightarrow k_d=\frac{1}{2}$

Ta có tiếp tuyến hợp với d một góc 30^0, nên có $\left|\frac{k_{tt}-k_d}{1+k_{tt}k_d}\right|=\tan 30^0$

$$\left|\frac{k_{tt}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}k_{tt}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\left(k_{tt}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(1+\frac{1}{2}k_{tt}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{11}{4}k_{tt}^2-4k_{tt}-\frac{1}{4}=0$$

Cho hàm số $y=f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ (C)

a). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4).

b). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=1$.

LỜI GIẢI

Ta có: $f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

a). Ta có $x_0=2 \Rightarrow f'(x_0)=f'(2)=-1$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4) là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=-1(x-2)+4 \Leftrightarrow y=-x+6$

b). Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị, ta có $f'(x_0)=1$

$\Leftrightarrow \frac{x_0^2-2x_0-1}{(x_0-1)^2}=1 \Leftrightarrow -1=1$ (vô lý).

Kết luận không có tiếp tuyến nào có hệ số góc bằng 1.

Cho hàm số (C): $y=\sqrt{1-x-x^2}$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0=\frac{1}{2}$.

b) Song song với đường thẳng (d): x + 2y = 0.

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Ta có $f'(x)=\frac{-1-2x}{2\sqrt{1-x-x^2}}$

a). Với $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = \sqrt{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là $y = f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$y = -2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -2x+\frac{3}{2}$.

b). Ta có $(d): x+2y=0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow k_d = -\frac{1}{2}$

Vì tiếp tuyến song song với d nên, $k_{tt} = k_d = -\frac{1}{2}$. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị,

ta có $f'(x_0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1-2x_0}{2\sqrt{1-x_0-x_0^2}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1+2x_0 = \sqrt{1-x_0-x_0^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2x_0 \ge 0 \\ x_0 = 0 \vee x_0 = -1 \end{cases}$

So với điều kiện $x_0 = 0$ (nhận), $x_0 = -1$ (loại)

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $(0;1)$ là: $y = -\frac{1}{2}(x-0)+1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x+1$.

Cho hàm số $y = x^3+3x^2-9x+5$ (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

LỜI GIẢI

Ta có $y' = f'(x) = 3x^2+6x-9$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến, vậy $f'(x_0) = 3x_0^2+6x_0-9$

Ta có $3x_0^2+6x_0-9 = 3(x_0^2+2x_0+1)-12 = 3(x_0+1)^2-12 \ge -12, \forall x_0 \in (C)$

Vậy $\min f'(x_0) = -12$ tại $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 16$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y = -12(x+1)+16 \Leftrightarrow y = -12x+4$

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O. (Khối A – 2009) .

LỜI GIẢI

Tập xác định $D = R \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Ta có $y' = f'(x) = \frac{-1}{(2x+3)^2}$

Vì tiếp tuyến (d) cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại A, B tạo thành tam giác OAB vuông cân, nên đường thẳng (d) hợp với trục Ox một góc 45^0.

Vậy có $k_{tt} = \pm\tan 45^0 \Leftrightarrow k_{tt} = \pm 1$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0) = \pm 1$

Với $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = 1$ (phương trình vô nghiệm).

Với $f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Leftrightarrow (2x_0+3)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = -1 \vee x_0 = -2$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này $y = -1(x+1)+1 \Leftrightarrow y = -x$. Tiếp tuyến này loại vì đường thẳng này đi qua gốc tọa độ nên không tạo thành được tam giác.

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này $y = -1(x+2) \Leftrightarrow y = -x-2$