CHỦ ĐỀ 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC TRÊN TẬP SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Căn bậc hai của số phức:** Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w.
   - .
2. **Phương trình bậc hai với hệ số thực**

   Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0\ (a,b,c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$. Xét $\Delta = b^2 - 4ac$, ta có
   - $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$.
   - $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm thực được xác định bởi công thức: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
   - $\Delta < 0$: phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

   Chú ý.
   - Mọi phương trình bậc n: $A_o z^n + A_1 z^{n-1} + ... + A_{n-1} z + A_n = 0$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).
   - ***Hệ thức Vi–ét đối với phương trình bậc hai với hệ số thực:*** Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (thực hoặc phức). Ta có hệ thức Vi–ét $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. **Dạng 1: Tìm căn bậc hai của một số phức**
   - **Trường hợp w là số thực:** Nếu a là một số thực

     \+ $a < 0$, a có các căn bậc hai là $\pm i\sqrt{|a|}$.

     \+ $a = 0$, a có đúng một căn bậc hai là 0.

     \+ $a > 0$, a có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{a}$.

   Ví dụ 1: Ta có hai căn bậc hai của – 1 là i và $-i$. Hai căn bậc hai của $-a^2$(a là số thực khác 0) là ai và $-ai$.
   - **Trường hợp** $w = a + bi\ (a,b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$

   Gọi $z = x + yi\ (x,y \in \mathbb{R})$ là một căn bậc hai của w khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là

$$\left(x+yi\right)^2=a+bi\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=a+bi\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}$$

Mỗi cặp số thực $(x;y)$ nghiệm đúng hệ phương trình trên cho ta một căn bậc hai $x+yi$ của số phức $w=a+bi$.

Ví dụ 2: Tìm các căn bậc hai của $w=-5+12i$.

Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ là một căn bậc hai của số phức $w=-5+12i$.

Ta có $z^2=w\Leftrightarrow\left(x+yi\right)^2=-5+12i\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-5\\2xy=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=4\\y=\dfrac{6}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\\\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy $w=-5+12i$ có hai căn bậc hai là $2+3i$ và $-2-3i$.

2. Dạng 2: Giải phương trình bậc hai với hệ số thực và các dạng toán liên quan

- **Giải các phương trình bậc hai với hệ số thực**

Ví dụ 3: Giải phương trình bậc hai sau: $z^2-z+1=0$

Ta có $\Delta=b^2-4ac=-3<0$

Phương trình có hai nghiệm phức phân biệt là $x_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

- **Giải phương trình quy về phương trình bậc hai với hệ số thực**

Phương pháp 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

– Bước 1: Nhẩm 1 nghiệm đặc biệt của phương trình.

+ Tổng các hệ số trong phương trình là 0 thì phương trình có một nghiệm $x=1$.

+ Tổng các hệ số biến bậc chẵn bằng tổng các hệ số biến bậc lẻ thì phương trình có một nghiệm $x=-1$.

+ Định lý Bơdu:

Phần dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $x-a$ bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x=a$.

Tức là $f(x)=(x-a)g(x)-f(a)$

Hệ quả: Nếu $f(a)=0$ thì $f(x)\vdots(x-a)$

Nếu $f(x)\vdots(x-a)$ thì $f(a)=0$ hay $f(x)=0$ có một nghiệm $x=a$.

– Bước 2: Đưa phương trình về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai bằng cách hân tích đa thức ở vế trái của phương trình thành nhân tử (dùng hằng đẳng thức, chia đa thức hoặc sử dụng lược đồ Hoocne) như sau:

Với đa thức $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ chia cho $x-a$ có thương là $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1x+b_0$ dư r

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		a_2	a_1	a_0
a	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=ab_{n-1}+a_{n-2}$	$b_{n-3}=ab_{n-2}+a_{n-3}$		$b_1=ab_2+a_2$	$b_0=ab_1+a_1$	$r=ab_0+b_0$

– Bước 3: Giải phương trình bậc nhất hoặc bậc hai, kết luận nghiệm

Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ:

– Bước 1: Phân tích phương trình thành các đại lượng có dạng giống nhau.

– Bước 2: Đặt ẩn phụ, nêu điều kiện của ẩn phụ (nếu có).

– Bước 3: Đưa phương trình ban đầu về phương trình bậc nhất, bậc hai với ẩn mới.

– Bước 4: Giải phương trình, kết luận nghiệm.

C. KỸ NĂNG SỬ DỤNG MÁY TÍNH

1. **Chọn chế độ tính toán với số phức:** MODE 2 màn hình hiện CMPLX.
   Nhập số thuần ảo i: Phím ENG

2. **Tìm các căn bậc hai của một số phức**

Ví dụ 5: Khai căn bậc hai số phức $z=-3-4i$ có kết quả:

Cách 1:

– Mode 2 (CMPLX)

– Nhập hàm X^2

– Sử dụng phím CALC, nhập từng giá trị vào, giá trị nào ra kết quả bằng z thì ta nhận.

Cách 2:

– Mode 1 (COMP)

– Nhấn Shift + (Pol), ta nhập $Pol(-3;4)$

– Nhấn Shift – (Rec), ta nhập $\mathrm{Re}c\left(\sqrt{X},Y:2\right)$, ta thu được kết quả $X=1;Y=2$
.

– Vậy 2 số phức cần tìm là $1+2i$ và $-1-2i$.