CHỦ ĐỀ 8. ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong

Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x,m)$, trong đó f là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Hãy tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi?

❖ **Phương pháp giải:**

- **Bước 1:** Đưa phương trình $y = f(x,m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau:

$$Am + B = 0 \text{ hoặc } Am^2 + Bm + C = 0.$$

- **Bước 2:** Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

- **Bước 3:** Kết luận
  - ✓ Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.
  - ✓ Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m).

II. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên:

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$ (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

❖ **Phương pháp giải:**

- **Bước 1:** Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.
- **Bước 2:** Lí luận để giải bài toán.

III. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng:

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

Bài toán 1: *Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(x_I, y_I)$.*

❖ **Phương pháp giải:**

- ✓ Gọi $M\left(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right)$, $N\left(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua điểm I.
- ✓ Ta có $\begin{cases} a + b = 2x_I \\ A(a^3 + b^3) + B\left(a^2 + b^2\right) + C\left(a + b\right) + 2D = 2y_I \end{cases}$.

Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được toạ độ M, N.

Trường hợp đặc biệt : *Cho đồ thị* $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. *Trên đồ thị* (C) *tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ Gọi $M\left(a, Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right), N\left(b, Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

✓ Ta có $\begin{cases} a + b = 0 \\ A(a^3 + b^3) + B\left(a^2 + b^2\right) + C\left(a + b\right) + 2D = 0 \end{cases}$.

✓ Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được toạ độ M, N.

Bài toán 3: *Cho đồ thị* $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ *trên đồ thị* (C) *tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng* $d: y = A_1x + B_1$.

❖ **Phương pháp giải:**

✓ Gọi $M\left(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right)$, $N\left(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng d.

✓ Ta có: $\begin{cases} I \in d & (1) \\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}_d = 0 & (2) \end{cases}$ (với I là trung điểm của MN và $\vec{u}_d$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d).

✓ Giải hệ phương trình tìm được *M, N.*

IV. Bài toán tìm điểm đặc biệt khác:

1. Lí thuyết:

Loại 1. Cho hai điểm $P\left(x_1; y_1\right); Q\left(x_2; y_2\right) \Rightarrow PQ = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$.

Cho điểm $M\left(x_0; y_0\right)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$, thì khoảng cách từ M đến d là $h\left(M; d\right) = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Loại 2. Khoảng cách từ $M\left(x_0; y_0\right)$ đến tiệm cận đứng $x = a$ là $h = \left|x_0 - a\right|$.

Loại 3. Khoảng cách từ $M\left(x_0; y_0\right)$ đến tiệm cận ngang $y = b$ là $h = \left|y_0 - b\right|$.

Chú ý: Những điểm cần tìm thường là hai điểm cực đại, cực tiểu hoặc là giao của một đường thẳng với một đường cong (C) nào đó. Vì vậy trước khi áp dụng công thức, ta cần phải tìm tìm điều kiện tồn tại rồi tìm tọa độ của chúng.

2. Các bài toán thường gặp:

Bài toán 1: *Cho hàm số* $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $\left(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0\right)$ *có đồ thị* (C). *Hãy tìm trên* (C) *hai điểm* A *và* B *thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách* AB *ngắn nhất.*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ (C) có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số α,β là hai số dương.

✓ Nếu A thuộc nhánh trái thì $x_A<-\dfrac{d}{c}\Rightarrow x_A=-\dfrac{d}{c}-\alpha<-\dfrac{d}{c}$; $y_A=f(x_A)$.

✓ Nếu B thuộc nhánh phải thì $x_B>-\dfrac{d}{c}\Rightarrow x_B=-\dfrac{d}{c}+\beta>-\dfrac{d}{c}$; $y_B=f(x_B)$.

✓ Sau đó tính $AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2=\left[\left(a+\beta\right)-\left(a-\alpha\right)\right]^2+\left(y_B-y_A\right)^2$.

✓ Áp dụng bất đẳng thức Côsi (Cauchy), ta sẽ tìm ra kết quả.

Bài toán 2: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y=f(x)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ Gọi $M\left(x;y\right)$ và tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là d thì $d=|x|+|y|$.

✓ Xét các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.

✓ Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.

✓ Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thi hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của d.

Bài toán 3: *Cho đồ thị (C) có phương trình $y=f(x)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy.*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ Theo đầu bài ta có $|y|=k|x|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=kx\\y=-kx\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=kx\\f\left(x\right)=-kx\end{array}\right.$.

Bài toán 4: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$. Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài MI ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ Tiệm cận đứng $x=\dfrac{-d}{c}$; tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$.

✓ Ta tìm được tọa độ giao điểm $I\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ của hai tiệm cận.

✓ Gọi $M\left(x_M;y_M\right)$ là điểm cần tìm. Khi đó:

$$IM^2=\left(x_M+\frac{d}{c}\right)^2+\left(y_M-\frac{a}{c}\right)^2=g\left(x_M\right)$$

✓ Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số g để thu được kết quả.

Bài toán 5: *Cho đồ thị hàm số* (C) *có phương trình* $y = f(x)$ *và đường thẳng* $d: Ax + By + C = 0$*. Tìm điểm* I *trên* (C) *sao cho khoảng cách từ* I *đến* d *là ngắn nhất.*

❖ **Phương pháp giải**

- ✓ Gọi I thuộc $(C) \Rightarrow I\left(x_0; y_0\right)$; $y_0 = f(x_0)$.
- ✓ Khoảng cách từ I đến d là $g(x_0) = h\left(I; d\right) = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
- ✓ Khảo sát hàm số $y = g(x)$ để tìm ra điểm I thỏa mãn yêu cầu.