

CHỦ ĐỀ 2. CỰC TRỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

+ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .

+ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

2. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

+ Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

+ Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+		-	$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↗		f_{CD}	↘		f_{CT}	

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. Quy tắc tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 1:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 2:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)$ và ký hiệu x_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) là các nghiệm.

Bước 3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

Bước 4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .

2. Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$.

Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị liên quan tới: $y - \frac{y' \cdot y''}{18a}$ (CASIO hỗ trợ).

3. Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm trùng phương.

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị là (C).

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$

(C) có ba điểm cực trị $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} > 0$

Hàm số có 3 cực trị là: $A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Độ dài các đoạn thẳng: $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

CÔNG THỨC TÍNH NHANH

Ba điểm cực trị tạo thành tam giác ABC thỏa mãn dữ kiện

STT	Dữ kiện	Công thức thỏa $ab < 0$
1	Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0$
2	Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0$
3	Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = \alpha$	$\tan \frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$
4	Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
5	Tam giác ABC có diện tích $\max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$

6	Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC} = r_0$	$r_0 = \frac{b^2}{ a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{a}} \right)}$
7	Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$a.m_0^2 + 2b = 0$
8	Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2 n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
9	Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
10	Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
11	Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 - 6ac = 0$
12	Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
13	Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC} = R_0$	$R = \left \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right $
14	Tam giác ABC cùng điểm O tạo hình thoi	$b^2 - 2ac = 0$
15	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
16	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
17	Tam giác ABC có cạnh $BC = k.AB = k.AC$	$b^3.k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
18	Trục hoành chia ΔABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2} ac $
19	Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 - 8ac = 0$
20	Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c \right) y + c \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} \right) = 0$	