CHỦ ĐỀ 1. BÀI TOÁN THỰC TẾ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Các dạng toán về lãi suất ngân hàng:

1. Lãi đơn: là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến gửi tiền ra.

a) Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là:

$$\boxed{S_n = A + nAr = A(1+nr)} \quad (0.1)$$

<u>Chú ý:</u> *trong tính toán các bài toán lãi suất và các bài toán liên quan, ta nhớ* $r\%$ *là* $\frac{r}{100}$.

b) Ví dụ: Chú Nam gửi vào ngân hàng 1 triệu đồng với lãi đơn 5%/năm thì sau 5 năm số tiền chú Nam nhận được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

Giải:

Số tiền cả gốc lẫn lãi chú Nam nhận được sau 5 năm là: $S_5 = 1.(1+5.0,05) = 1,25$ (triệu đồng)

2. Lãi kép: tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

a) Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là:

$$\boxed{S_n = A(1+r)^n} \quad (0.2)$$

Chú ý: Từ công thức (2) ta có thể tính được:

$$\boxed{n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n}{A}\right)} \quad (0.3)$$

$$\boxed{r\% = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1} \quad (0.4)$$

$$\boxed{A = \frac{S_n}{(1+r)^n}} \quad (0.5)$$

b) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Chú Việt gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với lãi kép 5%/năm.

a) Tính số tiền cả gốc lẫn lãi chú Việt nhận được sau khi gửi ngân hàng 10 năm.

b) Với số tiền 10 triệu đó, nếu chú Việt gửi ngân hàng với lãi kép $\frac{5}{12}\%$ /tháng thì sau 10 năm chú Việt nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn hay ít hơn?

Giải:

a) Số tiền cả gốc lẫn lãi nhận được sau 10 năm với lãi kép 5%/năm là

$$S_{10} = 10.\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10} \approx 16,28894627 \text{ triệu đồng.}$$

b) Số tiền cả gốc lẫn lãi nhận được sau 10 năm với lãi kép $\frac{5}{12}\%$ /tháng là

$$S_{120} = 10.\left(1+\frac{5}{12\times 100}\right)^{120} \approx 16,47009498 \text{ triệu đồng.}$$

Vậy số tiền nhận được với lãi suất $\frac{5}{12}\%$ /tháng nhiều hơn.

Ví dụ 2:

a) Bạn An gửi tiết kiệm một số tiền ban đầu là 1000000 đồng với lãi suất 0,58%/tháng (không kỳ hạn). Hỏi bạn An phải gửi bao nhiêu tháng thì được cả vốn lẫn lãi bằng hoặc vượt quá 1300000 đồng ?

b) Với cùng số tiền ban đầu và cùng số tháng đó, nếu bạn An gửi tiết kiệm có kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 0,68%/tháng, thì bạn An sẽ nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu? Biết rằng trong các tháng của kỳ hạn, chỉ cộng thêm lãi chứ không cộng vốn và lãi tháng trước để tình lãi tháng sau. Hết một kỳ hạn, lãi sẽ được cộng vào vốn để tính lãi trong kỳ hạn tiếp theo (nếu còn gửi tiếp), nếu chưa đến kỳ hạn mà rút tiền thì số tháng dư so với kỳ hạn sẽ được tính theo lãi suất không kỳ hạn.

Giải:

a) Ta có $n = \log_{1,0058}\left(\frac{1300000}{1000000}\right) \approx 45,3662737$ nên để nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi bằng hoặc vượt quá 1300000 đồng thì bạn An phải gửi ít nhất là 46 tháng.

b) Ta thấy 46 tháng là 15 kỳ hạn và thêm 1 tháng nên số tiền nhận được là

$$S = 10^6.1,0068^{15}.1,0058 \approx 1361659,061.$$

Ví dụ 3: Lãi suất của tiền gửi tiết kiệm của một số ngân hàng thời gian vừa qua liên tục thay đổi. Bạn Châu gửi số tiền ban đầu là 5 triệu đồng với lãi suất 0,7% tháng chưa đầy một năm, thì lãi suất tăng lên 1,15% tháng trong nửa năm tiếp theo và bạn Châu tiếp tục gửi; sau nửa năm đó lãi suất giảm xuống còn 0,9% tháng, bạn Châu tiếp tục gửi thêm một số tháng tròn nữa, khi rút tiền bạn Châu được cả vốn lẫn lãi là 5 747 478,359 đồng (chưa làm tròn). Hỏi bạn Châu đã gửi tiền tiết kiệm trong bao nhiêu tháng?

Giải:

Gọi X, Y $\left(X, Y \in \mathbb{Z}^+ : X, Y \le 12\right)$ lần lượt là số tháng bạn Châu đã gửi với lãi suất 0,7%/tháng và 0,9%/tháng thì ta có

$$5.10^6.1,007^X.1,0115^6.1,009^Y = 5747478,359$$
$$\Leftrightarrow 1,009^Y = \frac{5747478,359}{5.10^6.1,007^X.1,0115^6}$$
$$\Leftrightarrow Y = \log_{1,009}\frac{5747478,359}{5.10^6.1,007^X.1,0115^6}$$

Nhập vào máy tính $\boxed{\text{Mode}}\boxed{7}$ nhập hàm số $f(X) = \log_{1,009}\frac{5747478,359}{5.10^6.1,007^X.1,0115^6}$, cho giá trị X chạy từ 1 đến 10 với STEP 1. Nhìn vào bảng kết quả ta được cặp số nguyên là $X = 5; Y = 4$.

Vậy bạn Châu đã gửi tiền tiết kiệm trong $5+6+4=15$ tháng.

3. Tiền gửi hàng tháng: Mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào 1 thời gian cố định.

a) Công thức tính: Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép $r\%$ /tháng thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là S_n.

Ý tưởng hình thành công thức:

+ Cuối tháng thứ nhất, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_1 = A(1+r) = \frac{A}{r}\left[(1+r)^1 - 1\right](1+r)$$

+ Đầu tháng thứ hai, khi đã gửi thêm số tiền A đồng thì số tiền là

$$T_1 = A(1+r) + A = A\left[(1+r)+1\right] = A\frac{\left[(1+r)^2-1\right]}{(1+r)-1} = \frac{A}{r}\left[(1+r)^2-1\right]$$

+ Cuối tháng thứ hai, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_2 = \frac{A}{r}\left[(1+r)^2-1\right](1+r)$$

+ Từ đó ta có công thức tổng quát

$$\boxed{S_n = \frac{A}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)} \quad (0.6)$$

<u>Chú ý</u>: Từ công thức (1.6) ta có thể tính được:

$$\boxed{n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n.r}{A(1+r)}+1\right)} \quad (0.7)$$

$$\boxed{A = \frac{S_n.r}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}} \quad (0.8)$$

b) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Đầu mỗi tháng ông Mạnh gửi ngân hàng 580000 đồng với lãi suất 0,7%/tháng. Sau 10 tháng thì số tiền ông Mạnh nhận được cả gốc lẫn lãi (sau khi ngân hàng đã tính lãi tháng cuối cùng) là bao nhiêu?

Giải:

$$S_{10} = \frac{580000}{0,007}\left[(1,007)^{10} - 1\right].1,007 \approx 6028005,598 \text{ đồng}$$

Ví dụ 2: Ông Nghĩa muốn có ít nhất 100 triệu đồng sau 10 tháng kể từ khi gửi ngân hàng với lãi 0,7%/tháng thì mỗi tháng ông Nghĩa phải gửi số tiền ít nhất bao nhiêu?

Giải:

$$A = \frac{100.0,007}{1,007\left[(1,007)^{10} - 1\right]} \approx 9,621676353 \text{ đồng}$$

Ví dụ 3: Đầu mỗi tháng anh Thắng gửi vào ngân hàng số tiền 3 triệu đồng với lãi suất 0,6%/tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh Thắng được số tiền cả gốc lẫn lãi từ 100 triệu trở lên?

Giải:

$$n = \log_{1,006}\left(\frac{100.0,006}{3.1,006} + 1\right) \approx 30,31174423$$

Vậy anh Thắng phải gửi ít nhất là 31 tháng mới được số tiền cả gốc lẫn lãi từ 100 triệu trở lên.

Ví dụ 4: Đầu mỗi tháng bác Dinh gửi vào ngân hàng số tiền 3 triệu đồng sau 1 năm bác Dinh nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi là 40 triệu. Hỏi lãi suất ngân hàng là bao nhiêu phần trăm mỗi tháng?

Giải:

Ta có $40 = \frac{3}{r}\left[(1+r)^{12} - 1\right](1+r)$ nên nhập vào máy tính phương trình

$\frac{3}{X}\left[(1+X)^{12} - 1\right](1+X) - 40$ nhấn $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{CALC}}$ với $X = 0$ ta được $X = 0,016103725$

Vậy lãi suất hàng tháng vào khoảng $1,61\%$/tháng

4. Gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng:

a) Công thức tính: Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng. Tính số tiền còn lại sau n tháng là bao nhiêu?

Ý tưởng hình thành công thức:

Cuối tháng thứ nhất, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là $T_1 = A(1+r)$ và sau khi rút số tiền còn lại là

$$S_1 = A(1+r) - X = A(1+r) - X\frac{(1+r)-1}{r}$$

Cuối tháng thứ hai, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$T_2 = \left[A(1+r) - X\right](1+r) = A(1+r)^2 - X(1+r)$$

và sau khi rút số tiền còn lại là

$$S_2 = A(1+r)^2 - X(1+r) - X = A(1+r)^2 - X\left[(1+r)+1\right] = A(1+r)^2 - X\frac{(1+r)^2-1}{r}$$

Từ đó ta có công thức tổng quát số tiền còn lại sau n tháng là

$$\boxed{S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n-1}{r}} \qquad (0.9)$$

<u>Chú ý</u>: Từ công thức (9) ta có thể tính được:

$$\boxed{X = \left[A(1+r)^n - S_n\right]\frac{r}{(1+r)^n-1}} \qquad (0.10)$$

b) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Anh Chiến gửi ngân hàng 20 triệu đồng với lãi suất 0,75%/tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, anh Chiến đến ngân hàng rút 300 nghìn đồng để chi tiêu. Hỏi sau 2 năm số tiền anh Chiến còn lại trong ngân hàng là bao nhiêu?

Giải:

$$S_{24} = 2.10^7.(1,0075)^{24} - 3.10^5.\frac{(1,0075)^{24}-1}{0,0075} \approx 16071729,41 \text{ đồng.}$$

Ví dụ 2: Anh Chiến gửi ngân hàng 20 triệu đồng với lãi suất 0,7%/tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, anh Chiến rút một số tiền như nhau để chi tiêu. Hỏi số tiền mỗi tháng anh Chiến rút là bao nhiêu để sau 5 năm thì số tiền vừa hết?

Giải:

Vì $S_n = 0$ nên áp dụng công thức (1.10) thì $X = \dfrac{2.10^7.(1,007)^{60}.0,007}{(1,007)^{60}-1} \approx 409367,3765$ đồng.

5. Vay vốn trả góp: Vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

a) Công thức tính: Cách tính số tiền còn lại sau n tháng giống hoàn toàn công thức tính gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng nên ta có

$$\boxed{S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}} \qquad (0.11)$$

Để sau đúng n tháng trả hết nợ thì $S_n = 0$ nên

$$\boxed{A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0} \qquad (0.12)$$

và

$$\boxed{X = \frac{A(1+r)^n.r}{(1+r)^n - 1}} \qquad (0.13)$$

b) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Chị Năm vay trả góp ngân hàng số tiền 50 triệu đồng với lãi suất 1,15%/tháng trong vòng 2 năm thì mỗi tháng chị Năm phải trả số tiền bao nhiêu?

Giải:

Số tiền chị Năm phải trả mỗi năm là: $X = \frac{5.10^7.(1,0115)^{48}.0,0115}{(1,0115)^{48} - 1} \approx 1361312,807$ đồng

Ví dụ 2:

a) Anh Ba vay trả góp ngân hàng số tiền 500 triệu đồng với lãi suất 0,9%/tháng , mỗi tháng trả 15 triệu đồng. Sau bao nhiêu tháng thì anh Ba trả hết nợ?

b) Mỗi tháng anh Ba gửi vào ngân hàng số tiền 15 triệu đồng với lãi suất 0,7%/tháng thì sau thời gian trả nợ ở câu a), số tiền cả gốc lẫn lãi anh Ba nhận được là bao nhiêu?

Giải:

a) Ta có $500.(1,009)^n - 15.\frac{(1,009)^n - 1}{0,009} = 0$ giải được $X = 39,80862049$ nên phải trả nợ trong vòng 40 tháng.

b) Sau 40 tháng số tiền nhận được là $S_{40} = \frac{15}{0,007}\left[(1,007)^{40} - 1\right].1,007 \approx 694,4842982$ triệu đồng.

6. Bài toán tăng lương: Một người được lãnh lương khởi điểm là A đồng/tháng. Cứ sau n tháng thì lương người đó được tăng thêm $r\%$/tháng. Hỏi sau kn tháng người đó lĩnh được tất cả số tiền là bao nhiêu?

Công thức tính: Tổng số tiền nhận được sau kn tháng là $\boxed{S_{kn} = Ak\frac{(1+r)^k - 1}{r}}$ (0.14)

Ví dụ: Một người được lãnh lương khởi điểm là 3 triệu đồng/tháng. Cứ 3 tháng thì lương người đó được tăng thêm 7% /tháng. Hỏi sau 36 năm người đó lĩnh được tất cả số tiền là bao nhiêu?

Giải:

$$S_{36} = 3.10^6.12.\frac{(1,07)^{12} - 1}{0,07} \approx 643984245,8 \text{ đồng}$$

II. Bài toán tăng trưởng dân số:

Công thức tính tăng trưởng dân số $\boxed{X_m = X_n(1+r)^{m-n}}, (m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n)$ (1.1)

Trong đó:

$r\%$ là tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m

X_m dân số năm m

X_n dân số năm n

Từ đó ta có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là $\boxed{r\% = \sqrt[m-n]{\frac{X_m}{X_n}} - 1}$ (1.2)

Ví dụ: Theo kết quả điều tra dân số, dân số trung bình nước Việt Nam qua một số mốc thời gian (Đơn vị: 1.000 người):

Năm	1976	1980	1990	2000	2010
Số dân	49160	53722	66016,7	77635	88434,6

a) Tính tỉ lệ % tăng dân số trung bình mỗi năm trong các giai đoạn 1976-1980, 1980-1990, 1990-2000, 2000-2010. Kết quả chính xác tới 4 chữ số phần thập phân sau dấu phẩy. Giả sử tỉ lệ % tăng dân số trung bình mỗi năm không đổi trong mỗi giai đoạn.

b) Nếu cứ duy trì tỉ lệ tăng dân số như ở giai đoạn 2000-2010 thì đến năm 2015 và 2020 dân số của Việt Nam là bao nhiêu?

c) Để kìm hãm đà tăng dân số, người ta đề ra phương án: Kể từ năm 2010, mỗi năm phấn đấu giảm bớt $x\%$ (x không đổi) so với tỉ lệ % tăng dân số năm trước (nghĩa là nếu năm nay tỉ lệ tăng dân số là a% thì năm sau là $(a-x)\%$). Tính x để số dân năm 2015 là 92,744 triệu người.

Giải:

a)+ Tỉ lệ tăng dân số giai đoạn 1976 – 1980 là $r\% = \left(\sqrt[4]{\frac{53722}{49160}} - 1\right).100 \approx 2,243350914\%$

+ Tỉ lệ tăng dân số giai đoạn 1980 – 1990 là $r\% = \left(\sqrt[10]{\frac{66016,7}{53722}} - 1\right).100 \approx 2,082233567\%$

+ Tỉ lệ tăng dân số giai đoạn 1990 – 2000 là $r\% = \left(\sqrt[10]{\frac{77635}{66016,7}} - 1\right).100 \approx 1,63431738\%$

+ Tỉ lệ tăng dân số giai đoạn 2000 – 2010 là $r\% = \left(\sqrt[10]{\frac{88434,6}{77635}} - 1\right).100 \approx 1,31096821\%$

Giai đoạn	1976-1980	1980-1990	1990-2000	2000-2010
Tỉ lệ % tăng dân số/năm	2,2434%	2,0822%	1,6344%	1,3109%

b) Nếu duy trì tỉ lệ tăng dân số như ở giai đoạn 2000-2010 thì:

Đến năm 2015 dân số nước ta sẽ là: $88434,6(1+1,3109/100)^5 \approx 94,385$ triệu người.

Đến năm 2020 dân số nước ta sẽ là: $88434,6(1+1,3109/100)^{10} \approx 100,736$ triệu người.

c) Nếu thực hiện phương án giảm dân số đó thì đến năm 2015 dân số nước ta là:

$$88434,6(1,013109-x)(1,013109-2x)(1,013109-3x)(1,013109-4x)(1,013109-5x)$$

Ta có phương trình: $88434,6(1,013109-x)(1,013109-2x)...(1,013109-5x) = 92744$

giải phương trình ta được: $x\% \approx 0,1182\%$

III. Lãi kép liên tục:

Gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$/năm thì số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau n năm $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ là: $S_n = A(1+r)^n$. Giả sử ta chia mỗi năm thành m kì hạn để tính lãi và lãi suất mỗi kì hạn là $\frac{r}{m}\%$ thì số tiền thu được sau n năm là $S_n = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m.n}$

Khi tăng số kì hạn của mỗi năm lên vô cực, tức là $m \to +\infty$, gọi là hình thức lãi kép tiên tục thì người ta chứng minh được số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi là: $\boxed{S = Ae^{n.r}}$ (3.1)

Công thức (3.1) còn gọi là công thức tăng trưởng mũ.

Ví dụ 1: Sự tăng trưởng dân số được ước tính theo công thức tăng trưởng mũ. Biết rằng tỉ lệ tăng dân số thế giới hàng năm là 1,32%, năm 2013 dân số thế giới vào khoảng 7095 triệu người. Khi đó dự đoán dân số thế giới năm 2020 sẽ là bao nhiêu?

Giải:

Theo công thức tăng trưởng mũ thì dự đoán dân số năm 2010 là $S = 7095.e^{7.0,0132} \approx 7781$ triệu người

Ví dụ 2: Biết rằng đầu năm 2010, dân số Việt Nam là 86932500 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7% và sự tăng dân số được tính theo công thức tăng trưởng mũ. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 100 triệu người?

Giải:

Ta có $100 = 86,9325.e^{n.0,017} \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln\dfrac{100}{86,9325}}{0,017} \approx 8,2$

Vậy cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm 2018 dân số nước ta ở mức 100 triệu người.