TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

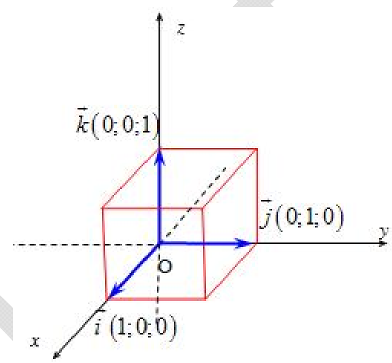
A. LÝ THUYẾT

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Trong không gian, xét ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy gọi là ***hệ trục tọa độ vuông góc*** trong không gian.

<u>*Chú ý*</u>: $\quad \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$.

2. Tọa độ của vectơ



a) Định nghĩa: $\vec{u} = (x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b) Tính chất: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3),\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3),\ k \in R$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{0} = (0;0;0),\ \vec{i} = (1;0;0),\ \vec{j} = (0;1;0),\ \vec{k} = (0;0;1)$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\,(\vec{b} \neq \vec{0}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = k\vec{b} \quad (k \in R)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

- $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ *(với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)*

3. Tọa độ của điểm

a) Định nghĩa: $M(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ *(x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)*

Chú ý:
- $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0; M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0; M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$
- $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0; M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0; M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$.

b) Tính chất: Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A),\ B(x_B;\ y_B;\ z_B)$

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC:
$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$
- Toạ độ trọng tâm G của tứ diện ABCD:
$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\frac{z_A+z_B+z_C+z_C}{4}\right)$$

4. Tích có hướng của hai vectơ

a) Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, được xác định bởi

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$$

Chú ý: *Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.*

b) Tính chất:

- $[\vec{a},\ \vec{b}]\perp\vec{a}$; $\quad [\vec{a},\ \vec{b}]\perp\vec{b}$
- $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$
- $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$; $\quad \left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$; $\quad \left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$
- $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ **(Chương trình nâng cao)**
- $\vec{a},\ \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $[\vec{a},\ \vec{b}]=\vec{0}$ (chứng minh 3 điểm thẳng hàng)

c) Ứng dụng của tích có hướng: (Chương trình nâng cao)

- ***Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ:*** $\vec{a},\ \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $[\vec{a},\ \vec{b}].\vec{c}=0$
- ***Diện tích hình bình hành*** $ABCD$ **:** $\quad S_{\square ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$
- ***Diện tích tam giác*** ABC **:** $\quad S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right|$
- ***Thể tích khối hộp*** $ABCDA'B'C'D'$ **:** $\quad V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- ***Thể tích tứ diện*** $ABCD$ **:** $\quad V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$

Chú ý:

– ***Tích vô hướng*** của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.

– ***Tích có hướng*** của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$
$\vec{a}$ vaø $\vec{b}$ cuøng phöông $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ñoàng phaúng $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0$

5. Một vài thao tác sử dụng máy tính bỏ túi (Casio Fx570 Es Plus, Casio Fx570 Vn Plus, Vinacal 570 Es Plus)

Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A\left(x_A, y_A, z_A\right), B\left(x_B, y_B, z_B\right), C\left(x_C, y_C, z_C\right), D\left(x_D, y_D, z_D\right)$

w 8 1 1 (nhập vectơ $\overrightarrow{AB}$)

q 5 2 2 2 (nhập vectơ $\overrightarrow{AC}$)

q 5 2 3 1 (nhập vectơ $\overrightarrow{AD}$)

C q53q54= (tính $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$)

C q53q54q57q55= (tính $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}$)

Cqc(Abs) q53q54q57q55= (tính $\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$)

C1a6qc(Abs) q53q54q57q55=

(tính $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$