CHỦ ĐỀ: TỌA ĐỘ TRONG KHƠNG GIAN

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A.TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA.

I. Tọa độ trong không gian

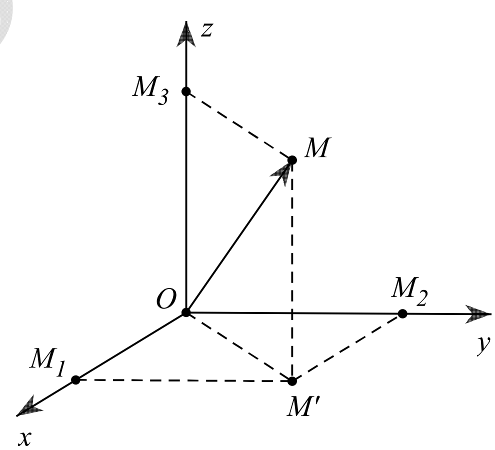
1) Hệ trục tọa độ trong không gian $Oxyz$

- Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian.
- Điểm O gọi là gốc của hệ tọa độ, trục Ox là trục hoành, Oy là trục tung và Oz là trục cao.
- Véctơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, ta có:

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1, \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

- Xét điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ thì $M(x; y; z)$. Ngược lại, điểm $M(x; y; z)$ thì $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.
- Với véctơ $\vec{u}$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ luôn tồn tại duy nhất bộ $(x; y; z)$ thỏa: $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.

Tọa độ $\vec{u}$ là $(x; y; z)$.



2) Tọa độ véc tơ – Tọa độ điểm

Cho $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ và số thực k. Khi đó

* $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$ * $k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1)$

* $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = k \Rightarrow \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}.$

Chú ý: Nếu $x_2 = 0$ $\left(y_2 = 0, z_2 = 0\right)$ thì $x_1 = 0$ $\left(y_1 = 0, z_1 = 0\right)$

* $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

* $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

* $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

* $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

Cho $A = (x_A; y_A; z_A)$, $B = (x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, $D(x_D; y_D; z_D)$.

Khi đó:

* $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

* $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

* Trung điểm I của đoạn AB: $I = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

* Trọng tâm G của ΔABC:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

* Trọng tâm G của tứ diện ABCD:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

3) Tích có hướng của hai véc tơ và ứng dụng

a) Định nghĩa: Cho $\vec{a} = \left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)$ và $\vec{b} = \left(x_2;\ y_2;\ z_2\right)$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

b) Các tính chất:

* $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$

* $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{a}$ và $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{b}$

* $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin(\vec{a}, \vec{b})$

c) Các ứng dụng của tích có hướng

- Diện tích tam giác: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.

- Thể tích:

  * **Hình hộp:** $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

  * **Tứ diện:** $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

Điều kiện 3 véctơ đồng phẳng:

* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0$

* A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 0$.

3. Phương trình mặt cầu.

Mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (1).$$

Phương trình (1) có thể được biểu diễn cách khác như sau

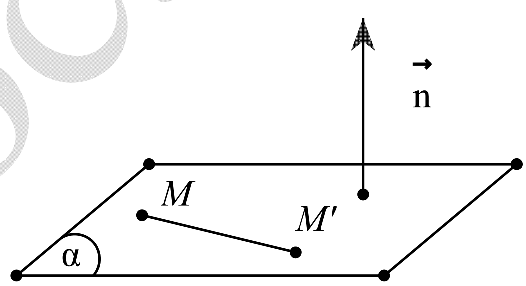
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (2)$$

Với $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \\ R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}$.

II. Phương trình mặt phẳng

1. Véc tơ pháp tuyến:

Định nghĩa: Cho mặt phẳng (α). Véc tơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là véc tơ pháp tuyến (VTPT) của mp(α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α), kí hiệu $\vec{n} \perp (\alpha)$.



Chú ý:

*Nếu $\vec{n}$ là VTPT của (α) thì $k.\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTPT của (α). Vậy mp(α) có vô số VTPT.

* Nếu hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ (không cùng phương) có giá song song (hoặc nằm trên) (α) thì $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là một VTPT của mp(α).

* Nếu ba điểm A, B, C phân biệt không thẳng hàng thì véc tơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ là một VTPT của $mp\left(ABC\right)$.

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

* Cho $mp(\alpha)$ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$, có $\vec{n} = (A; B; C)$ là một VTPT . Khi đó phương trình tổng quát của (α) có dạng:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

* Nếu $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A; B; C)$ là một VTPT của (α).

* Nếu $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$; $abc \neq 0$ thì phương trình của (ABC) có dạng:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ và được gọi là phương trình theo đoạn chắn của (α).

3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng :

Cho hai mp $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$

* (P) cắt $(Q) \Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'$.

$*(P) // (Q) \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$

$(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$

$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

Khoảng cách từ $M\left(x_0; y_0; z_0\right)$ đến mp $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ là:

$$d(M, (P)) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

III. Phương trình đường thẳng trong không gian

1. Phương trình tham số của đường thẳng:

a) Véc tơ chỉ phương của đường thẳng:

Cho đường thẳng Δ. Véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là véc tơ chỉ phương(VTCP) của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.

Chú ý 1.3.3:

* Nếu $\vec{u}$ là VTCP của Δ thì $k.\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTCP của Δ

* Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP