# TÍCH PHÂN

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. Định nghĩa

Cho $f$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F$ là một nguyên hàm của $f$ trên $[a;b]$. Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ *a* đến *b* (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$ của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx.$

Ta dùng kí hiệu $F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b)-F(a)$. Vậy

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a).$$

*Nhận xét*: Tích phân của hàm số $f$ từ *a* đến *b* có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào *f* và các cận *a*, *b* mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

*Ý nghĩa hình học của tích phân*: Nếu hàm số $f$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích *S* của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục O*x* và hai đường thẳng $x=a, x=b.$ Vậy $S=\int_a^b f(x)dx.$

### 2. Tính chất của tích phân

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \ (a<b<c)$

4. $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx \ (k\in\mathbb{R})$

5. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

## A. KỸ NĂNG CƠ BẢN

### 1. Một số phương pháp tính tích phân

#### I. Dạng 1: Tính tích phân theo công thức

**Ví dụ 1:** Tính các tính phân sau:

a) $I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3}$.  b) $I=\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$.  c) $I=\int_0^1 \frac{2x+9}{x+3}dx$.  d) $I=\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}dx$.

**Hướng dẫn giải**

a) $I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3}=\int_0^1 \frac{d(1+x)}{(1+x)^3}=-\frac{1}{2(1+x)^2}\Big|_0^1=\frac{3}{8}$.

b) $I=\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(x-\ln(x+1)\right)\Big|_0^1=1-\ln 2$.

c) $I=\int_0^1 \frac{2x+9}{x+3}dx=\int_0^1\left(2+\frac{3}{x+3}\right)dx=\left(2x+3\ln(x+3)\right)\Big|_0^1=3+6\ln 2-3\ln 3$.

d) $I=\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(4-x^2\right)}{4-x^2}=\ln|4-x^2|\,\Big|_0^1=\ln\frac{3}{4}$.

**Bài tập áp dụng**

1) $I=\int_0^1 x^3(x^4-1)^5dx$.

2) $I=\int_0^1\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}+1\right)dx$.

3) $I=\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$.

4) $I=\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

## II. Dạng 2: Dùng tính chất cận trung gian để tính tích phân

Sử dụng tính chất $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

**Ví dụ 2:** Tính tích phân $I=\int_{-2}^{2}|x+1|dx$.

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét: $|x+1|=\begin{cases} x+1, & -1\le x\le 2\\ -x-1, & -2\le x<-1\end{cases}$. Do đó

$$I=\int_{-2}^{2}|x+1|dx=\int_{-2}^{-1}|x+1|dx+\int_{-1}^{2}|x+1|dx$$
$$=-\int_{-2}^{-1}\left(x+1\right)dx+\int_{-1}^{2}\left(x+1\right)dx$$
$$=-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=5.$$

**Bài tập áp dụng**

1) $I=\int_{-4}^{3}|x^2-4|\,dx$.

2) $I=\int_{-1}^{2}|x^3-2x^2-x+2|\,dx$.

3) $I=\int_{0}^{3}|2^x-4|\,dx$.

4) $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2|\sin x|\,dx$.

5) $I=\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$.

## III. Dạng 3: Phương pháp đổi biến số

### 1) Đổi biến số dạng 1

Cho hàm số $f$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha\le u(x)\le\beta$. Giả sử có thể viết $f(x)=g(u(x))u'(x), x\in[a;b]$, với $g$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)}g(u)du.$$

**Ví dụ 3:** Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos xdx$.

**Hướng dẫn giải**

Đặt $u=\sin x$. Ta có $du=\cos xdx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u(0)=0; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

Khi đó $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos xdx=\int_0^1 u^2du=\frac{1}{3}u^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$

**Bài tập áp dụng**

1) $I=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$.

2) $I=\int_0^1 x\sqrt[3]{x+1}dx$.

3) $I=\int_1^e\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

4) $I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{2x\sqrt{2+\ln x}}$.

**Dấu hiệu nhận biết và cách tính tính phân**

| | Dấu hiệu | Có thể đặt | Ví dụ |
|---|---|---|---|
| 1 | Có $\sqrt{f(x)}$ | $t=\sqrt{f(x)}$ | $I=\int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t=\sqrt{x+1}$ |
| 2 | Có $(ax+b)^n$ | $t=ax+b$ | $I=\int_0^1 x(x+1)^{2016}dx$. Đặt $t=x-1$ |
| 3 | Có $a^{f(x)}$ | $t=f(x)$ | $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+3$ |
| 4 | Có $\frac{dx}{x}$ *và* $\ln x$ | $t=\ln x$ *hoặc* biểu thức chứa $\ln x$ | $I=\int_1^e \frac{\ln xdx}{x(\ln x+1)}$. Đặt $t=\ln x+1$ |
| 5 | Có $e^xdx$ | $t=e^x$ *hoặc* biểu thức chứa $e^x$ | $I=\int_0^{\ln 2} e^{2x}\sqrt{3e^x+1}dx$. Đặt $t=\sqrt{3e^x+1}$ |
| 6 | Có $\sin xdx$ | $t=\cos x$ | $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos xdx$. Đặt $t=\sin x$ |
| 7 | Có $\cos xdx$ | $t=\sin xdx$ | $I=\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{2\cos x+1}dx$ Đặt $t=2\cos x+1$ |
| 8 | Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$ | $t=\tan x$ | $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$ Đặt $t=\tan x$ |
| 9 | Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$ | $t=\cot x$ | $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{1-\cos 2x}dx=\int \frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x}dx$. Đặt $t=\cot x$ |

## 2) Đổi biến số dạng 2

Cho hàm số $f$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x=\varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$ và $a\le\varphi(t)\le b$ với mọi $t\in[\alpha;\beta]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Một số phương pháp đổi biến:** Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

1. $\sqrt{a^2-x^2}$ : đặt $x=|a|\sin t;\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
2. $\sqrt{x^2-a^2}$ : đặt $x=\frac{|a|}{\sin t};\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$
3. $\sqrt{x^2+a^2}$ : $x=|a|\tan t;\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
4. $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ : đặt $x=a.\cos 2t$

**Lưu ý:** Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với *x* mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

**Ví dụ 4:** Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$.

b) $I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$.

**Hướng dẫn giải**

a) Đặt $x=\sin t$ ta có $dx=\cos tdt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$. Vậy

$$I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt=\sin t|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

b) Đặt $x=\tan t,$ ta có $dx=\left(1+\tan^2 t\right)dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\to t=0\\ x=1\to t=\frac{\pi}{4}\end{cases}$. Vậy

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=t|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}.$$

## IV. Dạng 4: Phương pháp tính tích phân từng phần.

*Định lí* : Nếu $u=u(x)$ và $v=v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx,$$

hay viết gọn là $\int_a^b udv=uv|_a^b-\int_a^b vdu$.

Các dạng cơ bản: Giả sử cần tính $I=\int_a^b P(x).Q(x)dx$

| Dạng hàm | **P(*x*): Đa thức**<br>**Q(*x*):** $\sin(kx)$ **hay** $\cos(kx)$ | **P(*x*): Đa thức**<br>**Q(*x*):** $e^{kx}$ | **P(*x*): Đa thức**<br>**Q(*x*):** $\ln(ax+b)$ | **P(x): Đa thức** |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | **Q(x):** $\frac{1}{\sin^2 x}$ **hay** $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| **Cách đặt** | * $u = P(x)$<br>* *dv* là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân | * $u = P(x)$<br>* *dv* là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân | * $u = \ln\left(ax+b\right)$<br>* $dv = P\left(x\right)dx$ | * $u = P(x)$<br>* *dv* là Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân |

**Thông thường nên chú ý: "Nhất log, nhì đa, tam lượng, tứ mũ".**

**Ví dụ 5:** Tính các tích phân sau :

a) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx.$ b) $I = \int\limits_0^{e-1} x\ln(x+1)dx$ .

**Hướng dẫn giải**

a) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$. Do đó

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \left(-x\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

b) Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = xdx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = \dfrac{x^2-1}{2} \end{cases}$

$$I = \int\limits_0^{e-1} x\ln(x+1)dx = \left[\ln(x+1)\frac{x^2-1}{2}\right]\Bigg|_0^{e-1} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{e-1}(x-1)dx$$

$$= \frac{e^2-2e+2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^{e-1}$$

$$= \frac{e^2-2e+2}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^2-4e+3}{2}$$

$$= \frac{e^2+1}{4}.$$

**Bài tập áp dụng**

1) $I = \int\limits_0^1 (2x+2)e^x dx$ . 2) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2x.\cos x dx$ .

3) $I=\int_{0}^{2\pi} x^2.\sin\frac{x}{2}dx$.

4) $I=\int_{0}^{1} (x+1)^2 e^{2x}dx$.