LÝ THUYẾT SỐ PHỨC

1. Đơn vị ảo

Số i mà $i^2 = -1$ được gọi là đơn vị ảo.

2. Định nghĩa.

- Số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Gọi a là phần thực, b là phần ảo của số phức z.
- Tập số phức $\mathbb{C} = \left\{ a + bi / a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1 \right\}$. Tập số thực $\mathbb{R}$ là con của tập số phức $\mathbb{C}$.
- Hai số phức bằng nhau: $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
- Đặc biệt:

  Khi phần ảo $b = 0 \Leftrightarrow z = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z$ là số thực,

  Khi phần thực $a = 0 \Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow z$ là số thuần ảo,

  Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.

3. Môđun của số phức.

- $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là mô đun của số phức z.
- Kết quả: $\forall z \in \mathbb{C}$ ta có:

$$|z| \ge 0$$
$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$
$$|z^2| = |z|^2$$
$$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

4. Số phức liên hợp.

- Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi số phức liên hợp của z là $\overline{z} = a - bi$.
- Kết quả: $\forall z \in \mathbb{C}$ ta có:

$$\overline{\overline{z}} = z$$
$$|\overline{z}| = |z|$$
$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

z là số thực $\Leftrightarrow z = \overline{z}$

z là số thuần ảo $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$

5. Phép toán trên tập số phức:

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$ thì:

5.1. Phép cộng số phức:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

5.2. Phép trừ số phức:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Mọi số phức $z = a + bi$ thì số đối của z là $-z = -a - bi : z + (-z) = (-z) + z = 0$

5.3. Phép nhân số phức:

$$z_1 . z_2 = (ab - bd) + (ad + bc)i$$

Kết quả: $\begin{cases} i^{4k} = 1 \\ i^{4k+1} = i \\ i^{4k+2} = -1 \\ i^{4k+3} = -i \end{cases}$

5.4. Phép chia số phức:

- Số phức nghịch đảo của $z = a + bi \neq 0$: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{1}{a^2 + b^2} \cdot \overline{z}$

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 . \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$ (với $z_2 \neq 0$)

6. Phương trình bậc hai với hệ số thực.

6.1. Căn bậc hai của số phức.

- **Định nghĩa:** z là căn bậc hai của số phức $w \Leftrightarrow z^2 = w$.
- Cách tìm:

Giả sử $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của $w = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$.

Theo định nghĩa ta có: $(x + yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

Giải hệ thì có được x, y.

Kết quả:

- $w = 0$ có đúng một căn bậc hai là $z = 0$
- Khai căn bậc hai của số thực $a > 0$ là $\pm\sqrt{a}$
- Khai căn bậc hai của số thực $a < 0$ là $\pm i.\sqrt{-a}$
- Khai căn bậc hai của $2i$ là $\pm(1+i)$ vì $\left[\pm(1+i)\right]^2 = 2i$
- Khai căn bậc hai của $-2i$ là $\pm(1-i)$ vì $\left[\pm(1-i)\right]^2 = -2i$.

6.2. Phương trình bậc hai với hệ số thực.

Xét phương trình bậc hai: $az^2 + bz + c = 0$ với $a,b,c \in \mathbb{R}; a \neq 0$.

Biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép $z = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phức liên hợp $z = \dfrac{-b \pm i.\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

6.3. Kết quả:

- Phương trình bậc hai luôn có hai nghiệm phức, không nhất thiết phân biệt.
- Tổng quát, phương trình bậc $n(\forall n \geq 1)$:

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0\left(a_n \neq 0; a_j \in \mathbb{R}, j = \overline{0,n}\right)$ đều có n nghiệm phức, không nhất thiết phân biệt.