

## PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

- Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.
- Bất phương trình lôgarit là bất phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

#### 2. Phương trình và bất phương trình lôgarit cơ bản: cho $a, b > 0, a \neq 1$

- Phương trình lôgarit cơ bản có dạng:  $\log_a f(x) = b$
- Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng:  
 $\log_a f(x) > b; \log_a f(x) \geq b; \log_a f(x) < b; \log_a f(x) \leq b$

#### 3. Phương pháp giải phương trình và bất phương trình lôgarit

- Đưa về cùng cơ số

$$\text{➤ } \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}, \text{ với mọi } 0 < a \neq 1$$

$$\text{➤ } \text{Nếu } a > 1 \text{ thì } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\text{➤ } \text{Nếu } 0 < a < 1 \text{ thì } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

- Đặt ẩn phụ
- Mũ hóa

### B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

- Giải được phương trình và bất phương trình lôgarit bằng các phương pháp: đưa về lôgarit có cùng cơ số, mũ hóa và dùng ẩn phụ, sử dụng tính chất của hàm số

### C. MỘT SỐ DẠNG TOÁN CẦN LUYỆN TẬP

#### 1. Điều kiện xác định của phương trình

Câu 1: Điều kiện xác định của phương trình  $\log(x^2 - x - 6) + x = \log(x + 2) + 4$  là

- A.  $x > 3$                       B.  $x > -2$                       C.  $\mathbb{R} \setminus [-2; 3]$                       D.  $x > 2$

#### 2. Kiểm tra xem giá trị nào là nghiệm của phương trình

Câu 2: Phương trình  $\log_3(3x - 2) = 3$  có nghiệm là:

- A.  $x = \frac{29}{3}$                       B.  $x = \frac{11}{3}$                       C.  $x = \frac{25}{3}$                       D.  $x = 87$

#### 3. Tìm tập nghiệm của phương trình

Câu 3: Phương trình  $\log_2^2(x + 1) - 6\log_2 \sqrt{x + 1} + 2 = 0$  có tập nghiệm là:

- A.  $\{3; 15\}$                       B.  $\{1; 3\}$                       C.  $\{1; 2\}$                       D.  $\{1; 5\}$

4. Tìm số nghiệm của phương trình

Câu 4: Số nghiệm của phương trình  $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$  là:

- A. 1                                      B. 2                                      C. 3                                      D. 0

5. Tìm nghiệm lớn nhất, hay nhỏ nhất của phương trình

Câu 5: Tìm nghiệm lớn nhất của phương trình  $\log^3 x - 2\log^2 x = \log x - 2$  là

- A.  $x = \frac{1}{2}$                                       B.  $x = \frac{1}{4}$                                       C.  $x = 2$                                       D.  $x = 4$

6. Tìm mối quan hệ giữa các nghiệm của phương trình (tổng, hiệu, tích, thương...)

Câu 6: Gọi  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$ . Khi đó tích  $x_1 \cdot x_2$  bằng:

- A. 1                                      B. -1                                      C. -2                                      D. 2

7. Cho một phương trình, nếu đặt ẩn phụ thì thu được phương trình nào (ẩn  $t$ )

Câu 7: Nếu đặt  $t = \log_2 x$  thì phương trình  $\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1$  trở thành phương trình nào

- A.  $t^2 - 5t + 6 = 0$                                       B.  $t^2 + 5t + 6 = 0$   
C.  $t^2 - 6t + 5 = 0$                                       D.  $t^2 + 6t + 5 = 0$

8. Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình thỏa điều kiện về nghiệm số (có nghiệm, vô nghiệm, 2 nghiệm thỏa điều kiện nào đó...)

Câu 8: Tìm  $m$  để phương trình  $\log_3^2 x + 2\log_3 x + m - 1 = 0$  có nghiệm

- A.  $m \leq 2$                                       B.  $m < 2$                                       C.  $m \geq 2$                                       D.  $m > 2$

Câu 9: Tìm  $m$  để phương trình  $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$  có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn  $[1; 3^{\sqrt{5}}]$

- A.  $m \in [0; 2]$                                       B.  $m \in (0; 2)$                                       C.  $m \in (0; 2]$                                       D.  $m \in [0; 2)$

9. Điều kiện xác định của bất phương trình

Câu 10: Điều kiện xác định của bất phương trình  $\log_{\frac{1}{2}}(4x+2) - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}} x$  là:

- A.  $x > 1$                                       B.  $x > 0$                                       C.  $x > -\frac{1}{2}$                                       D.  $x > -1$

10. Tìm tập nghiệm của bất phương trình

Câu 11: Bất phương trình  $\log_2(2^x + 1) + \log_3(4^x + 2) \leq 2$  có tập nghiệm:

- A.  $(-\infty; 0]$                                       B.  $(-\infty; 0)$                                       C.  $[0; +\infty)$                                       D.  $(0; +\infty)$

Câu 12: Bất phương trình  $\log_2(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,5}(x-1) + 1$  có tập nghiệm là:

- A.  $[1 + \sqrt{2}; +\infty)$                                       B.  $[1 - \sqrt{2}; +\infty)$                                       C.  $(-\infty; 1 + \sqrt{2}]$                                       D.  $(-\infty; 1 - \sqrt{2}]$

11. Tìm nghiệm nguyên (tự nhiên) lớn nhất, nguyên (tự nhiên) nhỏ nhất của bất phương trình

Câu 13: Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình  $\log_2(\log_4 x) > \log_4(\log_2 x)$  là:

- A. 17                      B. 16                      C. 15                      D. 18
12. Tìm điều kiện của tham số  $m$  để bất phương trình thỏa điều kiện về nghiệm số (có nghiệm, vô nghiệm, nghiệm thỏa điều kiện nào đó...)

Câu 14: Tìm  $m$  để bất phương trình  $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) \leq m$  có nghiệm  $x \geq 1$

- A.  $m \geq 3$                       B.  $m > 3$                       C.  $m \leq 3$                       D.  $m < 3$

### 3.2 - LÔGARIT

#### NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Điều kiện xác định của phương trình  $\log_{2x-3} 16 = 2$  là:

- A.  $\frac{3}{2} < x \neq 2$ .                      B.  $x \neq 2$ .                      C.  $x \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ .                      D.  $x > \frac{3}{2}$ .

#### Hướng dẫn giải

Biểu thức  $\log_{2x-3} 16$  xác định  $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 > 0 \\ 2x-3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x \neq 2$ , chọn đáp án A.

Câu 2. Điều kiện xác định của phương trình  $\log_x(2x^2 - 7x - 12) = 2$  là:

- A.  $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ .                      B.  $x \in (-\infty; 0)$ .                      C.  $x \in (0; 1)$ .                      D.  $x \in (0; +\infty)$ .

#### Hướng dẫn giải

Biểu thức  $\log_x(2x^2 - 7x - 12)$  xác

định  $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2x^2 - 7x + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{47}{16}\right] > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$

chọn đáp án A.

Câu 3. Điều kiện xác định của phương trình  $\log_5(x-1) = \log_5 \frac{x}{x+1}$  là:

- A.  $x \in (1; +\infty)$ .                      B.  $x \in (-1; 0)$ .                      C.  $x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 0]$ .                      D.  $x \in (-\infty; 1)$ .

#### Hướng dẫn giải

Biểu thức  $\log_5(x-1)$  và  $\log_5 \frac{x}{x+1}$  xác định  $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

chọn đáp án A.

**Câu 4.** Điều kiện xác định của phương trình  $\log_9 \frac{2x}{x+1} = \frac{1}{2}$  là:

- A.  $x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 0]$ .      B.  $x \in (-1; +\infty)$ .      C.  $x \in (-1; 0)$ .      D.  $x \in (-\infty; 1)$ .

**Hướng dẫn giải**

Biểu thức  $\log_9 \frac{2x}{x+1}$  xác định :

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty), \text{ chọn đáp án A.}$$

**Câu 5.** Phương trình  $\log_2(3x-2) = 2$  có nghiệm là:

- A.  $x = 2$ .      B.  $x = \frac{2}{3}$ .      C.  $x = 1$ .      D.  $x = \frac{4}{3}$ .

**Hướng dẫn giải**

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 > 0 \\ 3x-2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x = 2 \end{cases}, \text{ chọn đáp án A.}$$

**Câu 6.** Phương trình  $\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = \log_2 5$  có nghiệm là:

- A.  $x = 2$ .      B.  $x = 1$ .      C.  $x = 3$ .      D.  $x = 0$ .

**Hướng dẫn giải**

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ (x+3)(x-1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = -8 \Rightarrow x = 2 \\ x = 2 \end{cases}, \text{ chọn đáp án A.}$$

**Câu 7.** Phương trình  $\log_3(x^2-6) = \log_3(x-2) + 1$  có tập nghiệm là:

- A.  $T = \emptyset$ .      B.  $T = \{0; 3\}$ .      C.  $T = \{3\}$ .      D.  $T = \{1; 3\}$ .

**Hướng dẫn giải**

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ x^2 - 6 = 3(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{6} \vee x > \sqrt{6} \\ x > 3 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset, \text{ chọn đáp án A}$$

**Câu 8.** Phương trình  $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$  có tập nghiệm là:

- A.  $\{2\}$ .      B.  $\{1; 3\}$ .      C.  $\{-1; 3\}$ .      D.  $\{1\}$ .

**Hướng dẫn giải**

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \\ \log_2[x(x-1)] = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \begin{cases} x = -1 \Leftrightarrow x = 2 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}, \text{ chọn đáp án A.}$$

**Câu 9.** Phương trình  $\log_2^2(x+1) - 6\log_2\sqrt{x+1} + 2 = 0$  có tập nghiệm là:

- A.  $\{1;3\}$ .                      B.  $\{3;15\}$ .                      C.  $\{1;2\}$ .                      D.  $\{1;5\}$ .

**Hướng dẫn giải**

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ \log_2^2(x+1) - 3\log_2(x+1) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \log_2(x+1) = 1 \\ \log_2(x+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}, \text{ chọn A.}$$

**Câu 10.** Số nghiệm của phương trình  $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$  là:

- A. 1.                                  B. 2.                                  C. 3.                                  D. 0.

**Hướng dẫn giải**

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \\ \log_4 x > 0 \\ \log_2^2(\log_2 x) + \log_2(\log_2^2 x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2\frac{1}{2} + \log_2(\log_2 x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{3}{2}\log_2(\log_2 x) - 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_2(\log_2 x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_2 x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 16, \text{ chọn đáp án A.}$$

**Câu 11.** Số nghiệm của phương trình  $\log_2 x \cdot \log_3(2x-1) = 2\log_2 x$  là:

- A. 2.                                  B. 0.                                  C. 1.                                  D. 3.

**Hướng dẫn giải**

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x-1 > 0 \\ \log_2 x \cdot \log_3(2x-1) = 2\log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \log_2 x [\log_3(2x-1) - 2] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \log_2 x = 0 \\ \log_3(2x-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}, \text{ chọn đáp án A.}$$



**Hướng dẫn giải**

**PT1:**  $2\log_5(3x-1)+1 = \log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 > 0 \\ 2x+1 > 0 \\ 2\log_5(3x-1)+1 = \log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ \log_5(3x-1)^2 + \log_5 5 = 3\log_5(2x+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ \log_5 5(3x-1)^2 = \log_5(2x+1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ 5(3x-1)^2 = (2x+1)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ 5(9x^2 - 6x + 1) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{8} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

**PT2:**  $\log_2(x^2 - 2x - 8) = 1 - \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ \log_2(x^2 - 2x - 8) = 1 - \log_{\frac{1}{2}}(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \vee x > 4 \\ x > -2 \\ \log_2(x^2 - 2x - 8) = 1 + \log_2(x+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \log_2(x^2 - 2x - 8) = \log_2 2(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 2x - 8 = 2(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \begin{cases} x = -2 \Rightarrow x_2 = 6 \\ x = 6 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy  $x_1 + x_2 = 2 + 6 = 8$ , chọn đáp án A.

**Câu 16.** Gọi  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$ . Khi đó tích  $x_1 \cdot x_2$  bằng:

- A. 1.                      B. -1.                      C. 2.                      D. -2.

**Hướng dẫn giải**

**[Phương pháp tự luận]**