Vấn đề 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Phương pháp:

1) Để lập phương trình của một (P) ta cần tìm một điểm mà (P) đi qua và một VTPT của (P). Khi tìm VTPT của (P) chúng ta cần lưu ý một số tính chất sau :

• Nếu giá của hai véc tơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ có giá song song hoặc nằm trên (P) thì $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là một VTPT của (P).

• Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì VTPT của mặt phẳng này cũng là VTPT của mặt phẳng kia.

• Nếu (P) chứa (hoặc song song) với AB thì giá của véc tơ $\overrightarrow{AB}$ sẽ nằm trên (hoặc song song) với (P).

• Nếu $(P) \perp (Q)$ thì VTPT của mặt phẳng này sẽ có giá nằm trên hoặc song song với mặt phẳng kia.

• Nếu $(P) \perp AB$ thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTPT của (P).

• Thông thường để lập phương trình mặt phẳng ta thường đi tìm cặp véc tơ có giá song song hoặc nằm trên (P), từ đó tìm được VTPT của (P).

2) Các trường hợp đặc biệt

• Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm không trùng với gốc tọa độ

$A(a;0;0), B(0;b;0),\ \ C(0;0;c)$ có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

• Các mặt phẳng tọa độ (Oyz) : $x = 0$, (Ozx) : $y = 0$, (Oxy) : $z = 0$.

• Mặt phẳng (α) qua gốc tọa độ $Ax + By + Cz = 0$.

• Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ hoặc chứa $(D = 0)$ trục Ox có dạng

$$By + Cz + D = 0.$$

• Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ hoặc chứa $(D = 0)$ trục Oy có dạng

$$Ax + Cz + D = 0.$$

• Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ hoặc chứa $(D = 0)$ trục Oz có dạng

$$Ax + By + D = 0.$$

• Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ với mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

$$Cz + D = 0.$$

- Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là

$$Ax + D = 0.$$

- Mặt phẳng (α) song song $(D \neq 0)$ với mặt phẳng (Ozx) có phương trình là

$$By + D = 0.$$

Ví dụ 1.2.6 Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trọng tâm tam giác là $G(3;\,6;\,1)$ và trung điểm của BC là $M(4;\,8;\,-1)$. Đường thẳng BC nằm trong mặt phẳng $2x + y + 2z - 14 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Lời giải.

Gọi tọa độ $A(x_A;\,y_A;\,z_A)$.

Ta có: $\overrightarrow{GA}(x_A - 3;\,y_A - 6;\,z_A - 1)$, $\overrightarrow{MG}(-1;\,-2;\,2)$.

Vì $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{MG}$ nên $\begin{cases} x_A - 3 = -2 \\ y_A - 6 = -4 \\ z_A - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = 2 \\ z_A = 5 \end{cases} \Rightarrow A(1;\,2;\,5)$.

Do B thuộc mặt phẳng $2x + y + 2z - 14 = 0 \Rightarrow B(a;\,14 - 2a - 2b;\,b)$.

Suy ra $\overrightarrow{MB}(a - 4;\,6 - 2a - 2b;\,b + 1)$, $\overrightarrow{MA}(-3;\,-6;\,6)$.

Tam giác ABC vuông cân tại A nên phải cĩ:

$$\begin{cases} MA \perp MB \\ MA = MB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \\ \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(a-4) - 6(6 - 2a - 2b) + 6(b+1) = 0 \\ (a-4)^2 + (6 - 2a - 2b)^2 + (b+1)^2 = 81 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2b \\ (2 + 2b)^2 + (2 + 2b)^2 + (b+1)^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2b \\ (b+1)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2b \\ \left[\begin{array}{l} b + 1 = 3 \\ b + 1 = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2b \\ \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2;\ a = -2 \\ b = -4;\ a = 10 \end{array}\right..$$

Nếu $a = -2;\ b = 2$ thì $B(-2;\,14;\,2)$, $C(10;\,2;\,-4)$.

Nếu $a = 10;\ b = -4$ thì $B(10;\,2;\,-4)$, $C(-2;\,14;\,2)$.

Ví dụ 2.2.6 Trong không gian tọa độ $Oxyz$,

1. Cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó b, c dương và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Xác định b và c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

2. Cho các điểm $A(5;\,3;\,-1),\ C(2;3;\,-4)$ là các đỉnh của hình vuông $ABCD.$ Tìm tọa độ điểm D biết điểm B nằm trên mặt phẳng có phương trình $(\alpha):\ x+y-z-6=0.$

Lời giải.

1. Phương trình $(ABC): \frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Vì $(ABC)\perp(P)\Rightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0 \Leftrightarrow b=c \Rightarrow (ABC): bx+y+z-b=0$.

Mà $d(O,(ABC))=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{b^2+2}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow b=\frac{1}{2}$ (do $b>0$).

Vậy $b=c=\frac{1}{2}$ là giá trị _an tìm.

2. Tâm hình vuông $I\left(\frac{7}{2};\,3;\,-\frac{5}{2}\right).$

Gọi $B(x;\,y;\,z)$ thì $\overrightarrow{AB}(x-5;\,y-3;\,z+1),\ \overrightarrow{CB}(x-2;\,y-3;\,z+4).$

Ta có $\begin{cases} B\in(\alpha) \\ AB=CB \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z-6=0 \\ x+z-1=0 \\ (x-5)(x-2)+(y-3)^2+(z+1)(z+4)=0 \end{cases}$

Giải ra ta có $B(2;\,3;\,-1)$ hoặc $B(3;\,1;\,-2).$

Suy ra các điểm cần tìm tương ứng là $D(5;\,3;\,-4)$ hoặc $D(4;\,5;\,-3).$

Ví dụ 3.2.6 Trong không gian $Oxyz$

1. Cho 2 điểm $A(2;0;1), B(0;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+4=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=3$ ***Đề thi ĐH Khối A – 2011***

2. Cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$ và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết B thuộc (S) và tam giác OAB đều. ***Đề thi ĐH Khối A – 2011***

Lời giải.

1. Gọi E là trung điểm AB ta có: $E(1;-1;2)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;2)$

Phương trình mặt phẳng trung trực (Q) của AB có phương trình: $x+y-z+2=0$.

Vì $MA=MB$ nên suy ra $M\in(Q)\Rightarrow M\in(P)\cap(Q)$

Gọi $M(a;b;c)$ suy ra: $\begin{cases}2a-b-c+4=0\\ a+b-c+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=3+\dfrac{3}{2}a\\ b=1+\dfrac{1}{2}a\end{cases}$

Mặt khác: $MA^2=9\Rightarrow(a-2)^2+\left(\dfrac{1}{2}a+1\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}a+2\right)^2=9$.

Giải ra ta được $a=0, a=-\dfrac{6}{7}$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là: $M\left(0;1;3\right)$, $M\left(-\dfrac{6}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right)$.

2. Xét $B(a;b;c)$. Vì tam giác AOB đều nên ta có hệ:

$\begin{cases}OA=OB\\ OA=AB\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2=32\\ (a-4)^2+(b-4)^2+c^2=32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b-4=0\\ c^2=32-a^2-b^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4-b\\ c^2=16-2b^2+8b\end{cases}$

Mà $B\in(S)$ nên : $a^2+b^2+c^2-4a-4b-4c=0$

$\Leftrightarrow(4-b)^2+b^2+16-2b^2+8b-4(4-b)-4b-4c=0$

Hay $c=4\Rightarrow b^2-4b=0\Rightarrow b=0, b=4$. Do đó $B(4;0;4)$ hoặc $B\left(0;4;4\right)$.

- $B\left(0;4;4\right)$ ta có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=\left(16;-16;16\right)$ nên phương trình (OAB):

$$x-y+z=0.$$

- $B(4;0;4)$ ta có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=\left(16;-16;-16\right)$ nên phương trình (OAB):

$$x-y-z=0.$$

Ví dụ 4.2.6 Trong không gian $Oxyz$