PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phương trình đường thẳng:

- Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ với $a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0$ làm vectơ chỉ phương. Khi đó Δ có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t; \ (t\in\mathbb{R}) \\ z = z_0 + a_2 t \end{cases}$$

- Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ sao cho $a_1a_2a_3\neq 0$ làm vectơ chỉ phương. Khi đó Δ có phương trình chính tắc là :

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

II. Góc:

1. **Góc giữa hai đường thẳng:**

Δ_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1}$

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2}$

$$\boxed{\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2}\right|}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|.\left|\overrightarrow{a_2}\right|}}$$

2. **Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:**

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}$

(α) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{n_\alpha}$

$$\boxed{\sin\left[\Delta,(\alpha)\right]=\frac{\left|\overrightarrow{a_\Delta}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{a_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|}}$$

III. Khoảng cách:

1. **Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ :**

Δ đi qua điểm M_0 và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}$

$$\boxed{d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{a_\Delta},\overrightarrow{M_0M}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{a_\Delta}\right|}}$$

2. **Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:**

Δ_1 đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1}$

Δ_2 đi qua điểm N và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2}$

$$\boxed{d(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\right]\right|}}$$

IV. Các dạng toán thường gặp:

1. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm phân biệt A,B.
   Cách giải: Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AB}$.
2. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và song song với d.
   Cách giải:
   - Nếu $d \equiv ox$ thì Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_\Delta}=\vec{i}=(1;0;0)$
   - Nếu $d \equiv oy$ thì Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_\Delta}=\vec{j}=(0;1;0)$
   - Nếu $d \equiv oz$ thì Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_\Delta}=\vec{k}=(0;0;1)$
   - Nếu d thì Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_\Delta}=\overrightarrow{a_d}$, với $\overrightarrow{a_d}$ là vectơ chỉ phương của d
3. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α).
   Cách giải: Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{a_\Delta}=\overrightarrow{n_\alpha}$, với $\overrightarrow{n_\alpha}$ là vectơ pháp tuyến của (α).
4. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và vuông góc với hai đường thẳng d_1,d_2 (hai đường thẳng không cùng phương).
   Cách giải: Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{a_\Delta}=\left[\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\right]$, với $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1,d_2.
5. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M vuông góc với đường thẳng d và song song với mặt phẳng (α).
   Cách giải: Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{a_\Delta}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_\alpha}\right]$, với $\overrightarrow{a_d}$ là vectơ chỉ phương của d, $\overrightarrow{n_\alpha}$ là vectơ pháp tuyến của (α).
6. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$,($(\alpha),(\beta)$ là hai mặt phẳng phân biệt)
   Cách giải: Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{a_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]$, với $\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của $(\alpha),(\beta)$.
7. Viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).
   Cách giải:
   - Lấy một điểm bất kì trên Δ, bằng cách cho một ẩn bằng một số tùy ý.

- Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{a_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]$, với $\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của $(\alpha),(\beta)$.

8. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và cắt hai đường thẳng $d_1,d_2\left(A\notin d_1, A\notin d_2\right)$.

Cách giải: Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{a_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]$, với $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của $mp\left(A,d_1\right),mp\left(A,d_2\right)$.

9. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) và cắt hai đường thẳng d_1,d_2.

Cách giải: Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{a_\Delta}=\overrightarrow{AB}$, với $A=d_1\cap(\alpha),B=d_2\cap(\alpha)$

10. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc và cắt d.

Cách giải:

- Xác định $B=\Delta\cap d$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A,B.

11. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với d_1 và cắt d_2, với $A\notin d_2$.

Cách giải:

- Xác định $B=\Delta\cap d_2$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A,B.

12. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt đường thẳng d và song song với mặt phẳng (α).

Cách giải:

- Xác định $B=\Delta\cap d$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A,B.

13. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) cắt và vuông góc đường thẳng d.

Cách giải:

- Xác định $A=d\cap(\alpha)$.
- Đường thẳng Δ đi qua A và có vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{a_\Delta}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_\alpha}\right]$, với $\overrightarrow{a_d}$ là vectơ chỉ phương của d, $\overrightarrow{n_\alpha}$ là vectơ pháp tuyến của (α).

14. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (α), nằm trong (α) và vuông góc đường thẳng d (ở đây d không vuông góc với (α)).

Cách giải:

- Xác định $A=d\cap(\alpha)$.
- Đường thẳng Δ đi qua A và có vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{a_\Delta}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_\alpha}\right]$, với $\overrightarrow{a_d}$ là vectơ chỉ phương của d, $\overrightarrow{n_\alpha}$ là vectơ pháp tuyến của (α).

15. Viết phương trình đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2.

Cách giải:

- Xác định $A = \Delta \cap d_1, B = \Delta \cap d_2$ sao cho $\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases}$
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.

16. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng d và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2.

Cách giải:

- Xác định $A = \Delta \cap d_1, B = \Delta \cap d_2$ sao cho $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{a_d}$ cùng phương, với $\overrightarrow{a_d}$ là vectơ chỉ phương của d.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{a_\Delta}$.

17. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2.

Cách giải:

- Xác định $A = \Delta \cap d_1, B = \Delta \cap d_2$ sao cho $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_\alpha}$ cùng phương, với $\overrightarrow{n_\alpha}$ là vectơ pháp tuyến của (α).
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{n_\alpha}$.

18. Viết phương trình Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (α).

Cách giải : Xác định $H \in \Delta$ sao cho $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{a_d}$,với $\overrightarrow{a_d}$ là vectơ chỉ phương của d.

- Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (α).
- Viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β)

19. Viết phương trình Δ là hình chiếu song song của d lên mặt phẳng (α) theo phương d' .

Cách giải :

- Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa d và có thêm một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d'}}$.
- Viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. Học sinh xác định được vectơ chỉ phương và điểm nào đó thuộc đường thẳng khi cho trước phương trình.
2. Học sinh biết cách chuyển từ phương trình tham số qua phương trình chính tắc và ngược lại.
3. Học sinh lập được phương trình chính tắc và phương trình tham số.
4. Học sinh tìm được hình chiếu, điểm đối xứng.