PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC TRÊN TẬP SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Căn bậc hai của số phức:

- Định nghĩa: Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w.

2. Phương trình bậc hai với hệ số thực:

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 \left(a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0\right)$. Xét $\Delta = b^2 - 4ac$, ta có:

- $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm thực được xác định bởi công thức: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta < 0$: phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

3. Định lí cơ bản của đại số:

Mọi phương trình bậc n: $A_o z^n + A_1 z^{n-1} + ... + A_{n-1} z + A_n = 0$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN:

I. Dạng 1: Tìm căn bậc hai của một số phức:

1. Trường hợp w là số thực: Nếu a là một số thực:

+ $a < 0$, a có các căn bậc hai là $\pm i\sqrt{|a|}$.
+ $a = 0$, a có đúng một căn bậc hai là 0.
+ $a > 0$, a có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{a}$.

Ví dụ 1: Ta có hai căn bậc hai của – 1 là i và $-i$.

Hai căn bậc hai của $-a^2$ (a là số thực khác 0) là ai và $-ai$.

2. Trường hợp $w = a + bi \left(a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\right)$:

$z = x + yi \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$ là một căn bậc hai của w khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là:

$$\left(x + yi\right)^2 = a + bi$$
$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Mỗi cặp số thực $\left(x; y\right)$ nghiệm đúng hệ phương trình trên cho ta một căn bậc hai $x + yi$ của số phức $w = a + bi$.

Ví dụ 2: Tìm các căn bậc hai của $w = -5 + 12i$.

Giải: Giả sử $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$ là một căn bậc hai của số phức $w = -5 + 12i$.

Ta có $z^2 = w \Leftrightarrow (x+yi)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy $w = -5 + 12i$ có hai căn bậc hai là $2 + 3i$ và $-2 - 3i$.

II. Dạng 2: Giải phương trình bậc hai với hệ số thực và các dạng toán liên quan:

1. Giải các phương trình bậc hai với hệ số thực:

Ví dụ 3: Giải phương trình bậc hai sau: $z^2 - z + 1 = 0$

Giải: Xét $\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phức phân biệt là $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

.

2. Giải phương trình quy về phương trình bậc hai với hệ số thực:

Phương pháp 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

- Bước 1: Nhẩm 1 nghiệm đặc biệt của phương trình.

+ Tổng các hệ số trong phương trình là 0 thì phương trình có một nghiệm $x = 1$.

+ Tổng các hệ số biến bậc chẵn bằng tổng các hệ số biến bậc lẻ thì phương trình có một nghiệm $x = -1$.

+ Định lý Bơdu:

Phần dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $x - a$ bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = a$.

Tức là $f(x) = (x-a)g(x) - f(a)$

Hệ quả: Nếu $f(a) = 0$ thì $f(x) \vdots (x-a)$

Nếu $f(x) \vdots (x-a)$ thì $f(a) = 0$ hay $f(x) = 0$ có một nghiệm $x = a$.

- Bước 2: Đưa phương trình về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai bằng cách hân tích đa thức ở vế trái của phương trình thành nhân tử (dùng hằng đẳng thức, chia đa thức hoặc sử dụng lược đồ Hoocne) như sau:

Với đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ chia cho $x - a$ có thương là

$g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0$ dư r

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		a_2	a_1	a_0

a	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=ab_{n-1}+a_{n-2}$	$b_{n-3}=ab_{n-2}+a_{n-3}$		$b_1=ab_2+a_2$	$b_0=ab_1+a_1$	$r=ab_0+b_0$

- Bước 3: Giải phương trình bậc nhất hoặc bậc hai, kết luận nghiệm

Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ:

- Bước 1: Phân tích phương trình thành các đại lượng có dạng giống nhau.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ, nêu điều kiện của ẩn phụ (nếu có).
- Bước 3: Đưa phương trình ban đầu về phương trình bậc nhất, bậc hai với ẩn mới.
- Bước 4: Giải phương trình, kết luận nghiệm.

3. Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc hai với hệ số thực:

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Ta có hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ P=x_1.x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Ví dụ 4: Tính tổng và tích các nghiệm của phương trình sau: $z^2-z+1=0$

Giải: Ta có $\Delta=b^2-4ac=-3<0$ nên phương trình có hai nghiệm phức.

Theo Vi-ét, ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-1 \\ P=x_1.x_2=\dfrac{c}{a}=1 \end{cases}$

III. Phương pháp sử dụng máy tính giải nhanh các bài toán số phức (cụ thể đối với máy tính CASIO fx-570VN Plus):

1. Chọn chế độ tính toán với số phức: MODE 2 màn hình hiện CMPLX.

Nhập số thuần ảo i: Phím ENG.

2. Tìm các căn bậc hai của một số phức:

Ví dụ 5: Khai căn bậc hai số phức $z=-3-4i$ có kết quả:

Cách 1:

- Mode 2 (CMPLX)
- Nhập hàm X^2
- Sử dụng phím CALC, nhập từng giá trị vào, giá trị nào ra kết quả bằng z thì ta nhận.

Cách 2:

- Mode 1 (COMP)

- Nhấn Shift + (Pol), ta nhập $Pol(-3;4)$

- Nhấn Shift – (Rec), ta nhập $\mathrm{Re}c\left(\sqrt{X},Y:2\right)$, ta thu được kết quả $X=1;Y=2$.

- Vậy 2 số phức cần tìm là $1+2i$ và $-1-2i$.

3. Giải phương trình bậc hai với hệ số thực:

Ví dụ 6: Giải phương trình $z^2-(5-i)z+8-i=0$

A. $z=3-2i;z=2+i$

B. $z=3+i;z=-3-i$

C. $z=1-3i;z=-1+3i$

D. $z=1+i;z=-1-i$

Chọn chế độ số phức: MODE 2

Nhập vế trái phương trình với biến là X.

Sử dụng CALC để thử lần lượt các đáp án: CALC $\to 3-2i$. Nếu giá trị phương trình là 0 thì giá trị vừa thử là nghiệm của phương trình. Nếu giá trị phương trình khác 0 thì giá trị vừa thử không là nghiệm của phương trình.