PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình mũ cơ bản $a^x = b\ (a > 0,\ a \neq 1)$.

- Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.
- Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

2. Biến đổi, quy về cùng cơ số

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow a = 1 \text{ hoặc } \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}.$$

3. Đặt ẩn phụ

$$f\left[a^{g(x)}\right] = 0 \quad (0 < a \neq 1) \ \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}.$$

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$
- $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)},\ t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$
.

4. Logarit hóa

- Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1,\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.
- Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$

  hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a = g(x)$.

5. Giải bằng phương pháp đồ thị

- Giải phương trình: $a^x = f(x)\ (0 < a \neq 1)$. $\quad (*)$

- Xem phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ và $y=f(x)$. Khi đó ta thực hiện hai bước:

- **Bước 1**. Vẽ đồ thị các hàm số $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ và $y=f(x)$.
- **Bước 2**. Kết luận nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của hai đồ thị.

6. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

- **Tính chất 1.** Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $(a;b)$ thì số nghiệm của phương trình $f(x)=k$ trên $(a;b)$ không nhiều hơn một và $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v,\quad \forall u,v\in(a;b)$.
- **Tính chất 2.** Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) ; hàm số $y=g(x)$ liên tục và luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x)=g(x)$ không nhiều hơn một.
- **Tính chất 3.** Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì bất phương trình $f(u)>f(v)\Leftrightarrow u>v\ (\text{hoac } u<v),\quad \forall u,v\in D$.

7. Sử dụng đánh giá

- Giải phương trình $f(x)=g(x)$.
- Nếu ta đánh giá được $\begin{cases} f(x)\geq m \\ g(x)\leq m \end{cases}$ thì $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=m \\ g(x)=m \end{cases}$.

8. Bất phương trình mũ

- Khi giải bất phương trình mũ, ta cần chú ý đến tính đơn điệu của hàm số mũ.

$\boxed{a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>1 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)<g(x) \end{cases}\end{array}\right.}$. Tương tự với bất phương trình dạng:

$$\left[\begin{array}{l} a^{f(x)}\geq a^{g(x)} \\ a^{f(x)}<a^{g(x)} \\ a^{f(x)}\leq a^{g(x)} \end{array}\right.$$

- Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì: $\boxed{a^M > a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) > 0}$

  .
- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình mũ:
  - \+ Đưa về cùng cơ số.
  - \+ Đặt ẩn phụ.
  - \+ Sử dụng tính đơn điệu: $\begin{cases} y = f(x) \text{ đồng biến trên } D \text{ thì: } f(u) < f(v) \Rightarrow u < v \\ y = f(x) \text{ nghịch biến trên } D \text{ thì: } f(u) < f(v) \Rightarrow u > v \end{cases}$