DẠNG 2: SẮP XẾP NGƯỜI HOẶC ĐỒ VẬT.

Xếp 6 học sinh A, B, C, D, E, F vào một ghế dài, có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:
a). 6 học sinh ngồi bất kỳ.
b). A và F luôn ngồi ở hai đầu ghế.
c). A và F luôn luôn ngồi cạnh nhau.
d). A, B, C luôn luôn ngồi cạnh nhau.
e). A, B, C, D luôn luôn ngồi cạnh nhau.
f). A và F luôn luôn ngồi cạnh nhau.

LỜI GIẢI

a). Xếp 6 học sinh vào 6 ghế thành hàng ngang là hoán vị của 6 phần tử. Số cách xếp là $6!$ cách.

b).

Bước 1: Xếp A và F ngồi ở hai đầu ghế có $2!$ cách xếp

Bước 2: Xếp 4 bạn còn lại vào 4 ghế còn lại có $4!$ cách xếp.

Theo quy tắc nhân có: $2!4! = 48$ cách xếp.

c). Vì A và F luôn ngồi cạnh nhau nên gom 2 bạn này thành nhóm X.

Bước 1: Xếp X và 4 bạn còn lại ngồi vào ghế có $5!$ cách xếp.

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có $2!$ cách xếp các bạn trong nhóm X.

Theo quy tắc nhân có: $5!2! = 240$ cách.

d). Vì A, B, C luôn luôn ngồi cạnh nhau nên gom ba bạn này thành nhóm Y.

Bước 1: Xếp Y và 3 bạn còn lại ngồi vào ghế có $4!$ cách xếp.

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có $3!$ cách xếp các bạn trong nhóm Y.

Theo quy tắc nhân ta có: $4!3! = 144$ cách xếp.

e). Vì A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau, nên gom 4 người này thành một nhóm Z.

Bước 1: Xếp Z và hai người còn lại, có $3!$ cách xếp.

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 4! cách xếp các phần tử trong Z.

Theo quy tắc nhân có $3!4! = 144$ cách.

f). Bước 1: Xếp 4 bạn B, C, D, E ngồi vào ghế có $4!$ cách xếp.

Bước 2: Giả sử 4 bạn B, C, D, E là những vách ngăn. Giữa 4 bạn có 3 vị trí, thêm hai vị trí ở hai đầu, tổng cộng có 5 vị trí trống để xếp hai bạn A và F.

Chọn 2 vị trí trong 5 vị trí, sau đó xếp 2 bạn A và F , có A_5^2 cách.

Theo quy tắc nhân có: $4!A_5^2 = 480$ cách.

Một tổ có 5 nam và 3 nữ, trong đó có 2 bạn A và B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp tổ trên thành một hàng ngang sao cho:
a). A và B đứng cách nhau hai người.
b). Giữa 2 người nữ có đúng một người nam.
c). Không có 2 người nữ nào được đứng gần nhau.

LỜI GIẢI

a).

Bước 1: Chọn 2 người trong 6 người còn lại, có C_6^2 cách chọn, để tao thành nhóm X thỏa điều kiện AabB đứng kề nhau với a và b là người vừa chọn.
Bước 2: Xếp X và 4 người còn lại (bỏ 4 người A, a, b, B) có 5! cách xếp.
Bước 3: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 2 có 2! cách xếp hai người A và B, có 2! cách xếp hai người a và b.
Theo quy tắc nhân có $C_6^2.5!.2!.2! = 7200$ cách xếp thỏa yêu cầu.

b).

Vì giữa 3 bạn nữ có 2 vị trí trống, để xếp thỏa yêu cầu phải có dạng $\overline{AaBbC}$. Trong đó A, B, C là 3 bạn nữ, a, b là 2 bạn nam.

Bước 1: Chọn 2 bạn nam trong 3 bạn nam, có C_5^2 cách.

Bước 2: Gọi nhóm $\overline{AaBbC}$ là X. Xếp X và 3 bạn nam còn lại thành 1 hàng ngang có 4! cách.
Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 2! cách xếp các bạn nam trong X và 3! cách xếp các bạn nữ trong X.
Theo quy tắc nhân có $C_5^2.4!.2!.3!$ cách xếp thỏa yêu cầu.

c).
Bước 1: Xếp 5 bạn nam thành 1 hàng dọc có 5! cách xếp.
Bước 3: Coi 5 bạn nam là các vách ngăn, giữa 5 bạn nam có 4 vị trí trống và thêm 2 vị trí ngoài cùng, suy ra có 6 vị trí để xếp 3 người nữ, chọn 3 vị trí trong 6 vị trí có A_6^3 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $5!.A_6^3 = 14400$ cách.

Có 5 ông già, 4 bà lão, 3 em bé. Có bao nhiêu cách sắp xếp vào một ghế dài nếu:
a). Ông già, bà lão, em bé ngồi bất kì.
b). 5 ông già ngồi cạnh nhau, 4 bà lão ngồi cạnh nhau, 3 em bé ngồi cạnh nhau.
c). 4 bà lão ngồi cạnh nhau, 3 em bé ngồi cạnh nhau.

LỜI GIẢI

a). Xếp 12 người vào một ghế dài có $12! = 479001600$ cách xếp.
b). Bước 1: Xếp 5 ông già ngồi cạnh nhau, có 5! cách xếp.
Bước 2: Xếp 4 bà lão ngồi cạnh nhau, có 4! cách xếp
Bước 3: Xếp 3 em bé ngồi cạnh nhau có 3! cách xếp
Bước 4: Hoán vị 3 nhóm trên có 3! Cách.
Theo quy tắc nhân có: $5!4!3!3! = 103680$ cách xếp.

Có 4 người đàn ông, 2 người đàn bà và 1 đứa trẻ được xếp ngồi vào bảy chiếc ghế đặt quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho:
a). Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn bà?
b). Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn ông?

LỜI GIẢI

a). Bước 1: Chọn 1 ghế xếp em bé, có 1 cách (vì ngồi xung quanh bàn tròn).
Bước 2: Xếp 2 người phụ nữ ngồi 2 ghế kề em bé, có 2! cách.

Bước 3: Xếp 4 người đàn ông vào 4 ghế còn lại, có 4! cách.
Theo quy tắc nhân có 2!.4! = 48 cách xếp.

b). Bước 1: Chọn 2 người đàn ông trong 4 người, có C_4^2 cách.

Bước 2: Chọn 1 ghế xếp em bé, có 1 cách (vì ngồi xung quanh bàn tròn).
Bước 3: Xếp 2 người đàn ông vừa chọn ngồi 2 ghế kề em bé, có 2! cách.
Bước 4: Xếp 4 người còn lại vào 4 ghế còn lại, có 4! cách.

Theo quy tắc nhân có $C_4^2.2!.4! = 288$ cách xếp.

Có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 4 bạn nữ và 6 bạn nam vào 10 ghế mà không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau, nếu:
a). Ghế xếp thành hàng ngang? b). Ghế xắp quanh một bàn tròn?

LỜI GIẢI

a). Bước 1: Xếp 6 bạn nam thành một dãy, có 6! cách.
Bước 2: Xem các bạn nam là những vách ngăn, giữa 6 bạn nam có 5 vị trí và thêm 2 vị trí ở hai đầu. Tổng cộng có 7 vị trí để xếp 4 bạn nữ. Chọn 4 vị trí trong 7 vị trí để xếp 4 bạn nữ, có A_7^4 cách.

Theo quy tắc nhân có $6!.A_7^4 = 604800$ cách.

b). Bước 1: Xếp 6 bạn nam ngồi quanh một bàn tròn, có 5! cách.
Bước 2: Xem các bạn nam là những vách ngăn, giữa 6 bạn nam có 6 vị trí để để xếp 4 bạn nữ. Chọn 4 vị trí trong vị trí để xếp 4 bạn nữ, có A_6^4 cách.

Theo quy tắc nhân có $5!.A_6^4 = 43200$ cách.

Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 em này trên một hàng ngang trong mỗi yêu cầu sau đây:
a). Giữa hai bạn nữ bất kì đều không có một em nam nào?
b). Hai vị trí đầu và cuối hàng là các em nam và không có 2 em nữ nào ngồi cạnh nhau?

LỜI GIẢI

a). Vì giữa 2 bạn nữ không có một bạn nam nào, có nghĩa 3 bạn nữ này đứng cạnh nhau.
Gọi nhóm 3 bạn nữ này là nhóm X.
Bước 1: Xếp X và 7 bạn nam trên một hàng ngang, có 8! cách xếp.
Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 3! cách xếp các bạn nữ trong X.
Vậy có 8!.3! = 241920 cách xếp.
b). Bước 1: Xếp 7 bạn nam thành một hàng ngang, có 7! cách xếp.
Bước 2: Xem các bạn nam là những vách ngăn, giữa 7 bạn nam có 6 vị trí để xếp 3 bạn nữ. Chọn 3 vị trí trong 6 vị trí để xếp ba bạn nữ có A_6^3 cách.

Theo quy tắc nhân có $7!.A_6^3 = 604800$ cách.

Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn nam và 3 bạn nữ ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn, sao cho không có 2 bạn nữ nào ngồi cạnh nhau.

LỜI GIẢI

Ta thực hiện các công đoạn sau:

Bước 1: Xếp 5 bạn nam ngồi quanh bàn tròn, có (5 – 1)! = 4! Cách.

Bước 2: giữa 5 bạn nam có 5 khoảng trống (xem 5 bạn nam là những vách ngăn), sau đó xếp 3 bạn nữ vào 3 trong 5 khoảng trống đó có A_5^3 cách.

Theo quy tắc nhân có $4!.A_5^3 = 1440$ cách.

Nhóm có 10 học sinh trong đó có 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 10 học sinh trên thành 1 hàng dọc,sao cho 7 học sinh nam phải đứng liền nhau.

LỜI GIẢI

Do 7 nam đứng cạnh nhau nên ta có thể xem họ như 1 vị trí x.

Bước 1: xếp x và 3 nữ có 4! cách

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 7! cách xếp 7 nam trong x.

Do đó số cách sắp xếp cần tìm là $4!7! = 120960$ cách.

Xếp 3 nam, 2 nữ vào 8 ghế. Có bao nhiêu cách, nếu :

a. Nam và nữ được xếp ngồi tùy ý.

b. Xếp 5 người ngồi kề nhau.

c. Xếp 3 nam ngồi kề, 2 nữ ngồi kề và giữa hai nhóm có ít nhất một ghế trống.

LỜI GIẢI

a . Chọn 5 ghế trong 8 ghế và xếp 5 người ngồi vào : có A_8^5 cách xếp.

b. Ta có 4 trường hợp sau :

- Ghế thứ 6, 7, 8 trống ;
- Ghế thứ 1, 7, 8 trống ;
- Ghế thứ 1, 2, 8 trống ;
- Ghế thứ 1, 2, 3 trống.

Mỗi cách xếp trên có $5!$ cách xếp 5 người ngồi vào. Vậy có tất cả $4.5!$ cách xếp.

Cách 2: Gọi nhóm 5 người này là nhóm A. Nhóm A chiếm 5 ghế còn lại 3 ghế trống. Bây giờ ta xem nhóm A đã ngồi 1 ghế. Bước 1: Cách xếp A vào 4 ghế (3 ghế trống và 1 ghế đang ngồi), có 4 cách. Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 5! Cách xếp các bạn trong nhóm A. Theo quy tắc nhân có 4.5! cách.

c). Xem ba ghế nam ngồi là một nhóm; 2 ghế nữ ngồi là một nhóm; mội ghế trống là một nhóm. Ta có 5 nhóm. Chọn 2 nhóm ghế để xếp nam và nữ có A_5^2 cách.

Trong số đó có 8 cách xếp nhóm nam và nhóm nữ ngồi kề nhau. Do đó ta có $20 - 8 = 12$ cách chọn vị trí để xếp nam và nữ thỏa bài toán. Ứng với mỗi cách xếp trên , ta có $3!$ cách xếp chỗ cho nam vào ba ghế dành cho nam và có $2!$ cách xếp 2 nữ ngồi vào 2 vị trí dành cho nữ. Vậy ta có tất cả $12.3!.2!$ cách xếp thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2: Gọi nhóm 3 nam là X, nhóm 2 nữ là Y. Tổng cộng hai nhóm này chiếm 5 ghế, vậy còn 3 ghế trống. (ta coi nhóm X ngồi 1 ghế, và nhóm Y ngồi 1 ghế).

Bây giờ bài toán trở thành xếp X và Y vào 5 ghế sao cho X và Y không ngồi gần nhau.

Trường hợp 1: Xếp X và Y bất kỳ.

Bước 1: Chọn 2 ghế trong 5 ghế để xếp X và Y, có A_5^2 cách.

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 3! Cách xếp các phần tử trong X, và 2! Cách xếp các bạn nữ trong Y.

Theo quy tắc nhân có $A_5^2.3!.2! = 240$ cách.

Trường hợp 2: Xếp X và Y ngồi cạnh nhau.

Vì X và Y ngồi cạnh nhau, nên gom 2 nhóm này thành nhóm A.

Bước 1: Xếp A vào 1 trong 4 ghế có 4 cách

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 2! Cách xếp 2 nhóm X và Y.

Bước 3: Ứng với mỗi cách xếp bước 2, có 3! Cách xếp 3 bạn nam trong X, và 2! Cách xếp các bạn nữ trong Y.

Vậy có $4.2!.3!.2! = 96$ cách xếp hai nhóm X và Y ngồi cạnh nhau.

Kết luận có 240 – 96 = 144 cách xếp thỏa yêu cầu.

Có 4 người đàn ông , 2 người đàn bà và một đứa trẻ . Có bao nhiêu cách xếp thành hàng ngang :

a). Sao cho 2 người đàn bà và đứa trẻ đứng cạnh nhau .

b). Sao cho đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà .

c). Sao cho đứa trẻ đứng giữa hai người đàn ông .

d). Đứa trẻ không đứng giữa hai người đàn bà .

e). Hai người đàn bà và đứa trẻ không ai đứng gần nhau .

LỜI GIẢI

a). Vì 2 người đàn bà và đứa trẻ đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X .

Bước 1: Số cách xếp 4 người đàn ông và X là $P_5 = 5! = 120$ cách xếp .

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp trên có $3! = 6$ cách xếp 2 người đàn bà và đứa trẻ .

Theo qui tắc nhân ta có $120.6 = 720$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .

b). Vì đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà có nghĩa 3 người này cũng đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X .

Bước 1: Số cách xếp 4 người đàn ông và X là $P_5 = 5! = 120$ cách xếp .

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp trên có $2! = 2$ cách xếp 2 người đàn bà .

Theo qui tắc nhân ta có $120.2 = 240$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .

c). Đầu tiên chọn 2 người đàn ông trong 4 người đàn ông có $C_4^2 = 6$ cách chọn .

Vì đứa trẻ đứng giữa hai người đàn ông có nghĩa 3 người này đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X .

Số cách xếp 4 người gồm 2 đàn ông còn lại, 2 đàn bà và X là $P_5 = 5! = 120$ cách xếp .

Ứng với mỗi cách xếp trên có $2! = 2$ cách xếp 2 người đàn ông .

Theo qui tắc nhân ta có $120.2.6 = 1440$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .

d). Bước 1 : Xắp sếp 7 người bất kỳ là 7!

Bước 2 : Xếp đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà là 240 cách
Suy ra số cách xếp hai đứa trẻ không đứng giữa hai người đàn bà :
$7! - 240 = 4800$ cách.
e). Hai người đàn bà và đứa trẻ không ai đứng gần nhau .
Bước 1: Xếp 4 người đàn ông thành một hàng, có 4! Cách xếp.
Bước 2: Xem 4 người đàn ông là những vách ngăn, giữa 4 người có 3 vị trí và thêm 2 vị trí ở hai đầu, tổng cộng có 5 vị trí để xếp 2 phụ nữ và 1 trẻ em. Chọn 3 vị trí trong 4 vị trí để xếp, có A_4^3 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $4!.A_4^3 = 576$ cách xếp thỏa yêu cầu.

Xếp 6 bạn nam và 4 bạn nữ thành một hàng dọc . Hỏi có bao nhiêu cách xếp :
a). Nữ luôn đứng cạnh nhau .
b). Nam nữ đứng xen kẽ .
c). Không có 2 nữ nào đứng cạnh nhau .
d). Nữ luôn đứng thành 2 cặp và hai cặp này không đứng cạnh nhau .

LỜI GIẢI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

a). Gọi 4 bạn nữ thành nhóm X . Cách xếp 6 bạn nam và X là 7! cách .
Ứng với mỗi cách xếp trên có 4! cách xếp bạn nữ .
Theo quy tắc nhân vậy có 7!.4! cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .
c). Bước đầu tiên xếp 6 bạn nam có 6! cách .
Vì các bạn nữ không đứng cạnh nhau , nên phải xếp các bạn nữ xen giữa các bạn nam . giữa 6 bạn nam có 5 vị trí và thêm 2 vị trí ở hai đầu , tổng cộng có 7 vị trí để xếp 4 bạn nữ . Vậy có tất cả A_7^4 cách .

Theo qui tắc nhân có $6!.A_7^4 = 604800$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .

d). Có $C_4^2 = 6$ cặp nữ . $a,b,c,d \Rightarrow \{a,b\},\{c,d\},\{a,c\},\{b,d\},\{a,d\},\{b,c\}$ trong 6 tập này có 3 cặp mà các phần tử trong mỗi tập đều khác nhau là $\{a,b\}$ và $\{c,d\}$, $\{a,c\}$ và $\{b,d\}$, $\{a,d\}$ và $\{b,c\}$

Bước đầu tiên xếp 6 bạn nam có 6! cách. Giữa 6 bạn nam có 5 vị trí và thêm 2 vị trí ở hai đầu , tổng cộng có 7 vị trí để xếp 2 cặp bạn nữ , vậy có A_7^2 cách xếp . Ứng với mỗi cách xếp 2 cặp bạn nữ có 2! cách xếp cặp bạn nữ thứ nhất và có 2! cách xếp cặp bạn nữ thứ hai .
Vì cách xếp các cặp là như nhau
Theo quy tắc nhân có $3.6!.A_7^2.2!.2! = 362880$ cách xếp .