[CHỦ ĐỀ 4.1. NGUYÊN HÀM]

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

Định lí:

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x) \text{ và } \int f'(x)dx=f(x)+C.$$

Tính chất 2

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \text{ với } k \text{ là hằng số khác } 0.$$

Tính chất 3

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lí: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp $(u=u(x))$
$\int 0dx = C$	$\int 0du = C$
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\left(\alpha \neq -1\right)$	$\int u^{\alpha}du = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + C\left(\alpha \neq -1\right)$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{u}du = \ln\|u\| + C$
$\int e^{x}dx = e^{x} + C$	$\int e^{u}du = e^{u} + C$
$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C\left(a > 0, a \neq 1\right)$	$\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C\left(a > 0, a \neq 1\right)$
$\int \sin xdx = -\cos x + C$	$\int \sin udu = -\cos u + C$
$\int \cos xdx = \sin x + C$	$\int \cos udu = \sin u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\cot x + C$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lí 1: Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

Hệ quả: Nếu $u = ax + b\left(a \neq 0\right)$ thì ta có

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Định lí 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Hay

$$\int udv = uv - \int vdu$$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

- Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số.

- Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần.