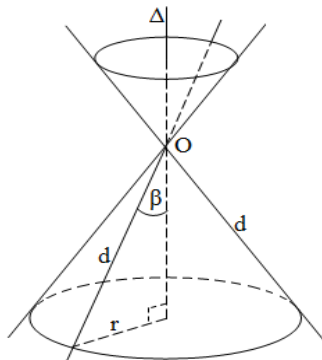


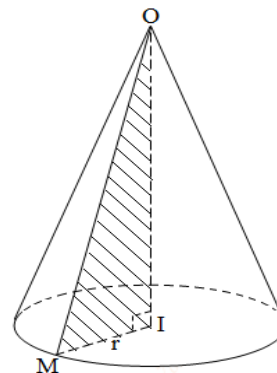
Chuyên đề 7. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỐ ĐIỂN
Chủ đề 7.5. MẶT CẦU – MẶT NÓN – MẶT TRỤ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. MẶT NÓN



Hình 1



Hình 2

1/ Mặt nón tròn xoay

Trong mặt phẳng (P) , cho 2 đường thẳng d , Δ cắt nhau tại O và chúng tạo thành góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Khi quay $mp(P)$ xung quanh trục Δ với góc β không thay đổi được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O (hình 1).

- ✧ Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón.
- ✧ Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng d được gọi là đường sinh và góc 2β gọi là góc ở đỉnh.

2/ Hình nón tròn xoay

Cho ΔOIM vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón) (hình 2).

- ✧ Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón.
- ✧ Hình tròn tâm I , bán kính $r = IM$ là đáy của hình nón.

3/ Công thức diện tích và thể tích của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h , bán kính đáy r và đường sinh là l thì có:

- ✧ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l$
 - ✧ Diện tích đáy (hình tròn): $S_\delta = \pi \cdot r^2$
- \Rightarrow Diện tích toàn phần hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_\delta$.

- ✧ Thể tích khối nón: $V_{nón} = \frac{1}{3} S_\delta \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$.

4/ Tính chất:

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

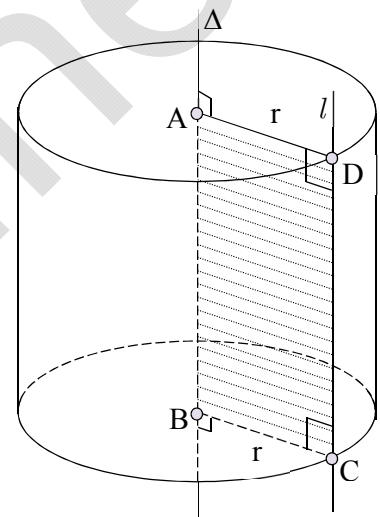
- ✧ TH1: Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi $mp(P)$ **đi qua đỉnh** thì có các trường hợp sau xảy ra:
 - + Nếu $mp(P)$ cắt mặt nón theo 2 đường sinh \Rightarrow Thiết diện là tam giác cân.
 - + Nếu $mp(P)$ tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. Trong trường hợp này, người ta gọi đó là mặt phẳng tiếp diện của mặt nón.
- ✧ TH2: Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi $mp(Q)$ **không đi qua đỉnh** thì có các trường hợp sau xảy ra:
 - + Nếu $mp(Q)$ vuông góc với trục hình nón \Rightarrow giao tuyến là một đường tròn.
 - + Nếu $mp(Q)$ song song với 2 đường sinh hình nón \Rightarrow giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol.
 - + Nếu $mp(Q)$ song song với 1 đường sinh hình nón \Rightarrow giao tuyến là 1 đường parabol.

II. MẶT TRỤ

1/ Mặt trụ tròn xoay

Trong $mp(P)$ cho hai đường thẳng Δ và l song song nhau, cách nhau một khoảng r . Khi quay $mp(P)$ quanh trục cố định Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ.

- ✧ Đường thẳng Δ được gọi là trục.
- ✧ Đường thẳng l được gọi là đường sinh.
- ✧ Khoảng cách r được gọi là bán kính của mặt trụ.



2/ Hình trụ tròn xoay

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc $ABCD$ tạo thành một hình, hình đó được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.

- ✧ Đường thẳng AB được gọi là trục.
- ✧ Đoạn thẳng CD được gọi là đường sinh.
- ✧ Độ dài đoạn thẳng $AB = CD = h$ được gọi là chiều cao của hình trụ.
- ✧ Hình tròn tâm A , bán kính $r = AD$ và hình tròn tâm B , bán kính $r = BC$ được gọi là 2 đáy của hình trụ.
- ✧ Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là khối trụ, là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ.

3/ Công thức tính diện tích và thể tích của hình trụ

Cho hình trụ có chiều cao là h và bán kính đáy bằng r , khi đó:

- ✧ Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh$
- ✧ Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{\text{Đáy}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$
- ✧ Thể tích khối trụ: $V = B.h = \pi r^2 h$

4/ Tính chất:

- ✧ Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ vuông góc với trục Δ thì ta được đường tròn có tâm trên Δ và có bán kính bằng r với r cũng chính là bán kính của mặt trụ đó.
- ✧ Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ không vuông góc với trục Δ nhưng cắt tất cả các đường sinh, ta được giao tuyến là một đường elíp có trục nhỏ bằng $2r$ và trục lớn bằng $\frac{2r}{\sin \varphi}$, trong đó φ là góc giữa trục Δ và $mp(\alpha)$ với $0^\circ < \varphi < 90^\circ$.
- ✧ Cho $mp(\alpha)$ song song với trục Δ của mặt trụ tròn xoay và cách Δ một khoảng d .
 - + Nếu $d < r$ thì $mp(\alpha)$ cắt mặt trụ theo hai đường sinh \Rightarrow thiết diện là hình chữ nhật.
 - + Nếu $d = r$ thì $mp(\alpha)$ tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh.
 - + Nếu $d > r$ thì $mp(\alpha)$ không cắt mặt trụ.

III. MẶT CẦU

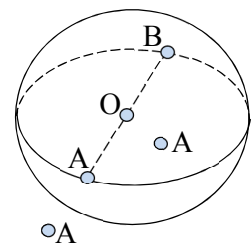
1/ Định nghĩa

Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R gọi là mặt cầu tâm O , bán kính R , kí hiệu là: $S(O; R)$. Khi đó $S(O; R) = \{M \mid OM = R\}$

2/ Vị trí tương đối của một điểm đối với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một điểm A bất kì, khi đó:

- ✧ Nếu $OA = R \Leftrightarrow A \in S(O; R)$. Khi đó OA gọi là bán kính mặt cầu. Nếu OA và OB là hai bán kính sao cho $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ thì đoạn thẳng AB gọi là một đường kính của mặt cầu.
- ✧ Nếu $OA < R \Leftrightarrow A$ nằm trong mặt cầu.
- ✧ Nếu $OA > R \Leftrightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu.
 - \Rightarrow Khối cầu $S(O; R)$ là tập hợp tất cả các điểm M sao cho $OM \leq R$.

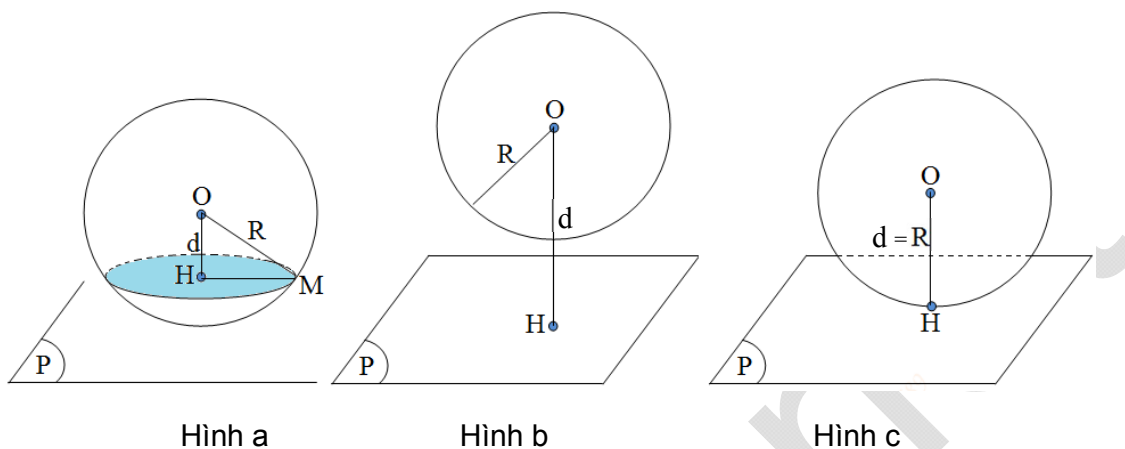


3/ Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một $mp(P)$. Gọi d là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến $mp(P)$ và H là hình chiếu của O trên $mp(P) \Rightarrow d = OH$.

- ✧ Nếu $d < R \Leftrightarrow mp(P)$ cắt mặt cầu $S(O; R)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên $mp(P)$ có tâm là H và bán kính $r = HM = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{R^2 - OH^2}$ (hình a).

- ✧ Nếu $d > R \Leftrightarrow mp(P)$ không cắt mặt cầu $S(O; R)$ (hình b).
- ✧ Nếu $d = R \Leftrightarrow mp(P)$ có một điểm chung duy nhất. Ta nói mặt cầu $S(O; R)$ tiếp xúc $mp(P)$. Do đó, điều kiện cần và đủ để $mp(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ là $d(O, (P)) = R$ (hình c).



4/ Vi trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến đường thẳng Δ . Khi đó:

- ✧ Nếu $d > R \Leftrightarrow \Delta$ không cắt mặt cầu $S(O; R)$.
- ✧ Nếu $d < R \Leftrightarrow \Delta$ cắt mặt cầu $S(O; R)$ tại hai điểm phân biệt.
- ✧ Nếu $d = R \Leftrightarrow \Delta$ và mặt cầu tiếp xúc nhau (tại một điểm duy nhất). Do đó: điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu là $d = d(O, \Delta) = R$.

Định lí: Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$ thì:

- ✧ Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu $S(O; R)$.
- ✧ Độ dài đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.
- ✧ Tập hợp các điểm này là một đường tròn nằm trên mặt cầu $S(O; R)$.

5/ Diện tích và thể tích mặt cầu

• Diện tích mặt cầu: $S_C = 4\pi R^2$.

• Thể tích mặt cầu: $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$.