

3.2 – LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa:

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$

Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

2. Các tính chất: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, ta có:

- $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$
- $a^{\log_a b} = b, \log_a (a^\alpha) = \alpha$

3. Lôgarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

- $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

4. Lôgarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

- $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$
- Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

5. Lôgarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α , ta có

- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$
- Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

6. Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- Đặc biệt: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

7. Lôgarit thập phân

- Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10
- Viết: $\log_{10} b = \log b = \lg b$

8. Lôgarit tự nhiên

- Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e
- Viết: $\log_e b = \ln b$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

- Biết vận dụng định nghĩa để tính một số biểu thức chứa lôgarit cơ bản

- Biết vận dụng các tính chất của lôgarit vào các bài tập biến đổi, tính toán các biểu thức chứa lôgarit

C. NHỮNG DẠNG TOÁN CẦN LƯU Ý

1. Tìm điều kiện để biểu thức $\log_a f(x)$ xác định

Ví dụ: Với giá trị nào của x thì biểu thức $\log_2(2x-1)$ xác định ?

- A. $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ B. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ D. $(-1; +\infty)$

2. Tính giá trị của một biểu thức chứa logarit

Ví dụ : Cho $a > 0, a \neq 1$, giá trị của biểu thức $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$ bằng bao nhiêu ?

- A. 16 B. 4 C. 8 D. 2

Ví dụ : Giá trị của biểu thức $A = 2\log_2 12 + 3\log_2 5 - \log_2 15 - \log_2 150$ bằng:

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

3. Rút gọn 1 biểu thức khi sử dụng các tính chất của loga chứa tham số

Ví dụ : Cho $a > 0, b > 0$, viết $\log_3 \left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{x}{5} \log_3 a + \frac{y}{15} \log_3 b$. Hỏi $x+y$ bằng bao nhiêu ?

- A. 4 B. 5 C. 2 D. 3

4. Tính giá trị của biểu thức Logarit theo các biểu thức logarit đã cho

Ví dụ: Cho $\log_2 5 = a; \log_3 5 = b$. Khi đó $\log_6 5$ tính theo a và b là

- A. $\frac{1}{a+b}$ B. $\frac{ab}{a+b}$ C. $a+b$ D. $a^2 + b^2$

5. Tìm x biết hệ thức liên quan (hạn chế casio)

Ví dụ: Cho $\log_3 x = 3\log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3$. Khi đó giá trị của x bằng:

- A. $\frac{40}{9}$ B. $\frac{200}{3}$ C. $\frac{20}{3}$ D. $\frac{25}{9}$

6. Tìm các khẳng định đúng trong các biểu thức logarit đã cho.

Ví dụ: Cho $a > 0, b > 0$ thỏa điều kiện $a^2 + b^2 = 7ab$. Khẳng định nào sau đây đúng:

- A. $3\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ B. $\log(a+b) = \frac{3}{2}(\log a + \log b)$
C. $2(\log a + \log b) = \log(7ab)$ D. $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

7. Tìm x dựa vào định nghĩa logarit.

Ví dụ: Tìm x biết $\log_x 243 = 5$, x bằng:

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 1

8. So sánh lôgarit với một số hoặc lôgarit với nhau

Ví dụ: Trong 4 số $3^{\log_3 4}; 3^{2\log_3 2}; \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 5}; \left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{0,5} 2}$ số nào nhỏ hơn 1

- A. $3^{\log_3 4}$ B. $3^{2\log_3 2}$ C. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 5}$ D. $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{0,5} 2}$

3.2 - LÔGARIT

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Với giá trị nào của x thì biểu thức $f(x) = \log_2(2x-1)$ xác định?

- A. $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. C. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. D. $x \in (-1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Biểu thức $f(x)$ xác định $\Leftrightarrow 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Ta chọn đáp án A

Câu 2. Với giá trị nào của x thì biểu thức $f(x) = \ln(4-x^2)$ xác định?

- A. $x \in (-2; 2)$. B. $x \in [-2; 2]$. C. $x \in \mathbb{R} \setminus [-2; 2]$. D. $x \in \mathbb{R} \setminus (-2; 2)$.

Hướng dẫn giải

Biểu thức $f(x)$ xác định $\Leftrightarrow 4-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$. Ta chọn đáp án A

Câu 3. Với giá trị nào của x thì biểu thức $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{3+x}$ xác định?

- A. $x \in \mathbb{R} \setminus [-3; 1]$. B. $x \in [-3; 1]$. C. $x \in \mathbb{R} \setminus (-3; 1)$. D. $x \in (-3; 1)$.

Hướng dẫn giải

Biểu thức $f(x)$ xác định $\Leftrightarrow \frac{x-1}{3+x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. Ta chọn đáp án A

Câu 4. Với giá trị nào của x thì biểu thức: $f(x) = \log_6(2x-x^2)$ xác định?

- A. $0 < x < 2$. B. $x > 2$. C. $-1 < x < 1$. D. $x < 3$.

Hướng dẫn giải

Biểu thức $f(x)$ xác định $\Leftrightarrow 2x-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$. Ta chọn đáp án A.

Câu 5. Với giá trị nào của x thì biểu thức: $f(x) = \log_5(x^3-x^2-2x)$ xác định?

- A. $x \in (-1; 0) \cup (2; +\infty)$. B. $x \in (1; +\infty)$.
C. $x \in (0; 1)$. D. $x \in (0; 2) \cup (4; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Biểu thức $f(x)$ xác định $\Leftrightarrow x^3-x^2-2x > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (2; +\infty)$. Ta chọn đáp án A.

Câu 11. Cho $(a > 0, a \neq 1)$, biểu thức $E = a^{4\log_a 2^5}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. 25. B. 625. C. 5. D. 5^8 .

Hướng dẫn giải

Ta có $E = a^{4\log_a 2^5} = a^{2^4 \log_a 5} = a^{\log_a 25} = 25$. Ta chọn đáp án A

Câu 12. Trong các số sau, số nào lớn nhất?

- A. $\log_3 \frac{6}{5}$. B. $\log_3 \frac{5}{6}$. C. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{6}{5}$. D. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5}{6}}$.

Hướng dẫn giải

+ **Tự luận:** Đưa về cùng 1 cơ số và so sánh

Ta thấy $\log_3 \frac{6}{5} > \log_3 \frac{5}{6} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{6}{5} = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5}{6}}$. Ta chọn đáp án A

+ **Trắc nghiệm:** Sử dụng máy tính, lấy 1 số bất kỳ trừ đi lần lượt các số còn lại, nếu kết quả > 0 thì giữ nguyên số bị trừ và thay đổi số trừ là số mới; nếu kết quả < 0 thì đổi số trừ thành số bị trừ và thay số trừ là số còn lại; lặp lại đến khi có kết quả.

Câu 13. Trong các số sau, số nào nhỏ nhất ?

- A. $\log_{\frac{1}{5}} 17$. B. $\log_{\frac{1}{5}} 9$. C. $\log_5 \frac{1}{12}$. D. $\log_5 \frac{1}{15}$.

Hướng dẫn giải

+ **Tự luận :** Đưa về cùng 1 cơ số và so sánh

Ta thấy $\log_{\frac{1}{5}} 17 < \log_{\frac{1}{5}} 15 = \log_5 \frac{1}{15} < \log_{\frac{1}{5}} 12 = \log_5 \frac{1}{12} < \log_{\frac{1}{5}} 9$. Ta chọn đáp án A.

+ **Trắc nghiệm:** Sử dụng máy tính, lấy 1 số bất kỳ trừ đi lần lượt các số còn lại, nếu kết quả < 0 thì giữ nguyên số bị trừ và thay đổi số trừ là số mới; nếu kết quả > 0 thì đổi số trừ thành số bị trừ và thay số trừ là số còn lại; lặp lại đến khi có kết quả.

Câu 14. Cho $a > 0, a \neq 1$, biểu thức $A = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e$ có giá trị bằng

- A. $2\ln^2 a + 2$. B. $4\ln a + 2$. C. $2\ln^2 a - 2$. D. $\ln^2 a + 2$.

Hướng dẫn giải

+**Tự luận :**

Ta có $A = \ln^2 a + 2\ln a \cdot \log_a e + \log_a^2 e + \ln^2 a - \log_a^2 e = 2\ln^2 a + 2\ln e = 2\ln^2 a + 2$. Ta chọn đáp án A

+**Trắc nghiệm** : Sử dụng máy tính, Thay $a=2$ rồi lấy biểu thức đã cho trừ đi lần lượt các biểu thức có trong đáp số, nếu kết quả nào bằng 0 thì đó là đáp số.

Câu 15. Cho $a > 0, a \neq 1$, biểu thức $B = 2\ln a + 3\log_a e - \frac{3}{\ln a} - \frac{2}{\log_a e}$ có giá trị bằng

- A. $3\ln a - \frac{3}{\log_a e}$. B. $4\ln a$. C. $4\ln a + 6\log_a 4$. D. $6\log_a e$.

Hướng dẫn giải

+**Tự luận** :

Ta có $B = 2\ln a + 3\log_a e - 3\log_a e - 2\ln a = 0 = 3\ln a - \frac{3}{\log_a e}$. Ta chọn đáp án A

+**Trắc nghiệm** : Sử dụng máy tính, Thay $a=2$ rồi lấy biểu thức đã cho trừ đi lần lượt các biểu thức có trong đáp số, nếu kết quả nào bằng 0 thì đó là đáp số.

Câu 16. Cho $a > 0, b > 0$, Nếu viết $\log_3 \left(\sqrt[5]{a^3 b} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{x}{5} \log_3 a + \frac{y}{15} \log_3 b$ thì $x+y$ bằng bao nhiêu?

- A.4. B.5. C.2. D.3.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_3 \left(\sqrt[5]{a^3 b} \right)^{\frac{2}{3}} = \log_3 (a^3 b)^{\frac{2}{15}} = \frac{2}{5} \log_3 a + \frac{2}{15} \log_3 b \Rightarrow x+y = 4$. Ta chọn đáp án A

Câu 17. Cho $a > 0, b > 0$, Nếu viết $\log_5 \left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}} \right)^{-0.2} = x \log_5 a + y \log_5 b$ thì xy bằng bao nhiêu ?

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 3 D. -3.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_5 \left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}} \right)^{-0.2} = \log_5 (a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{6}}) = -2 \log_5 a + \frac{1}{6} \log_5 b \Rightarrow x \cdot y = -\frac{1}{3}$. Ta chọn đáp án A

Câu 18. Cho $\log_3 x = 3 \log_3 2 + \log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} 3$. Khi đó giá trị của x là :

- A. $\frac{40}{9}$ B. $\frac{200}{3}$ C. $\frac{20}{3}$ D. $\frac{25}{9}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_3 x = \log_3 8 + \log_3 5 - \log_3 9 = \log_3 \frac{40}{9} \Rightarrow x = \frac{40}{9}$. Ta chọn đáp án A

Câu 19. Cho $\log_7 \frac{1}{x} = 2\log_7 a - 6\log_{49} b$. Khi đó giá trị của x là :

- A. $x = \frac{b^3}{a^2}$. B. $x = \frac{a^2}{b^3}$. C. $x = a^2b^3$. D. $2a - 6b$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_7 \frac{1}{x} = 2\log_7 a - 6\log_{49} b = \log_7 a^2 - \log_7 b^3 = \log_7 \frac{a^2}{b^3} \Rightarrow x = \frac{b^3}{a^2}$. Ta chọn đáp án A

Câu 20. Cho $a, b, c > 0; a \neq 1$ và số $\alpha \in \mathbb{R}$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\log_a(b-c) = \log_a b - \log_a c$. B. $\log_a a = 1$.
C. $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$. D. $\log_a a^c = c$.

Hướng dẫn giải

Câu A sai, vì không có tính chất về logarit của một hiệu

Câu 21. Cho $a, b, c > 0; a \neq 1$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\log_{a^c} b = c \log_a b$. B. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.
C. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. D. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Hướng dẫn giải

Câu A sai, vì $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$

Câu 22. Cho $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$. B. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.
C. $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$. D. $a^{\log_a b} = b$.

Hướng dẫn giải

Câu A sai, vì khẳng định đó chỉ đúng khi $a > 1$, còn khi $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

Câu 23. Cho $a, b, c > 0$ và $a > 1$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\log_a b > c \Leftrightarrow b > c$. B. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.
C. $\log_a b < \log_a c \Leftrightarrow b < c$. D. $a^b > a^c \Leftrightarrow b > c$.

Hướng dẫn giải

Câu A sai, vì $\log_a b > c \Leftrightarrow b > a^c$

Câu 24. Cho $a, b, c > 0$ và $a < 1$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $a^{\sqrt{2}} < a^{\sqrt{3}}$.

B. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

C. $\log_a b < \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

D. $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.

Hướng dẫn giải

Câu A sai, vì $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow a^{\sqrt{2}} > a^{\sqrt{3}}$ (do $0 < a < 1$)

Câu 25. Số thực a thỏa điều kiện $\log_3(\log_2 a) = 0$ là:

A. 2.

B. 3.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\log_3(\log_2 a) = 0 \Rightarrow \log_2 a = 1 \Rightarrow a = 2$. Ta chọn đáp án A

Câu 26. Biết các logarit sau đều có nghĩa, Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

B. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$

C. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

D. $\log_a b + \log_a c < 0 \Leftrightarrow b + c < 0$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A đúng với mọi a, b, c khi các logarit có nghĩa

Câu 27. Cho $a, b, c > 0$ và $a \neq 1$, Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai ?

A. $\log_a(b+c) = \log_a b + \log_a c$.

B. $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

C. $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.

D. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A sai, vì không có logarit của 1 tổng.

Câu 28. Số thực x thỏa mãn điều kiện $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 1$ là :

A. 64.

B. $2^{\frac{11}{6}}$.

C. 8.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Sử dụng máy tính và dùng phím CALC : nhập biểu thức $\log_2 X + \log_4 X + \log_8 X - 1$ vào máy và gán lần lượt các giá trị của x để chọn đáp án đúng. Với $x = 64$ thì qua bằng 0. Ta chọn A là đáp án đúng.

Câu 29. Số thực x thỏa mãn điều kiện $\log_x 2\sqrt[3]{2} = 4$ là :