HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1

1. Phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$

2. Gọi I là tâm mặt cầu. Vì $I\in Ox\Rightarrow I(x;0;0)$

Ta có $IA^2=IB^2\Leftrightarrow(x-1)^2+2^2+1^2=(x-3)^2+1^2+(-2)^2\Leftrightarrow x=2$

Suy ra tâm $I(2;0;0)$ và bán kính $R^2=IB^2=6$

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+z^2=6$.

3. Vì mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;4)$ và tiếp xúc với $mp(P)$

Suy ra $R=d(I,(P))=\dfrac{|2.3+2+2.4+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{20}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=\dfrac{400}{9}$.

4. Gọi C_1,C_2,C_3 lần lượt là hình chiếu của C lên các trục tọa độ Ox,Oy,Oz

Suy ra $C_1(2;0;0)$, $C_2(0;-4;0)$, $C_3(0;0;3)$.

Giả sử $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Do (S) đi qua C,C_1,C_2,C_3 nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}-4a+8b-6c+d=-29\\-4a+d=-4\\8b+d=-16\\-6c+d=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{d+4}{4}\\b=-\dfrac{d+16}{8}\\c=\dfrac{d+9}{6}\\-2d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=\dfrac{3}{2}\\d=0\end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-3z=0$.

5. Vì tâm I của mặt cầu nằm trên $mp(Oxy)$ nên $I(x;y;0)$

Ta có: $\begin{cases}IM^2=IN^2\\IN^2=IP^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6x+2y=1\\2x-4y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{10}\\y=\dfrac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{1}{10};\dfrac{4}{5};0\right)$.

Và $R^2 = IM^2 = \dfrac{109}{20}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): \left(x - \dfrac{1}{10}\right)^2 + \left(y - \dfrac{4}{5}\right)^2 + z^2 = \dfrac{109}{20}$.

6. Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với Oy nên suy ra $R = d(I, Oy) = 3$

Vậy phương trình $(S): (x-6)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 9$.

Bài 2

1.Ta có, bán kính mặt cầu $R = d(I,(P)) = \dfrac{|1+2+4+1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{8}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \dfrac{64}{9}$.

2. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mp(P)

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = -3+2t \end{cases}.$$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với $mp(P)$ tại A nên tâm

$I \in \Delta \Rightarrow I(1+t; 1+2t; -3+2t)$

Và $d(I,(P)) = R = 3 \Leftrightarrow \dfrac{|9t|}{3} = 3 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

* Với $t = 1 \Rightarrow I(2;3;-1) \Rightarrow (S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

* Với $t = -1 \Rightarrow I(0;-1;-5) \Rightarrow (S): x^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 9$.

3. Vì mặt cầu (S) có tâm $I \in d \Rightarrow I(2-3t; 1+2t; 1+2t)$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mp (P) và (Q) nên $d(I,(P)) = d(I,(Q)) = R$

$\Leftrightarrow \frac{|2-3t|}{3} = \frac{|6-3t|}{3} \Leftrightarrow 2-3t = -6+3t \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow I(-2;\frac{11}{3};\frac{11}{3})$ và $R = \frac{2}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-\frac{11}{3})^2 + (z-\frac{11}{3})^2 = \frac{4}{9}$.

4. Giả sử phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì

$$A,B,C,D \in (S) \Rightarrow \begin{cases} -2b+d+1=0 \\ -4a-6b-2c+d+14=0 \\ 4a-4b-4c+d+12=0 \\ -2a+2b-4c+d+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2b-1 \\ -4a-4b-2c+13=0 \\ 4a-2b-4c+11=0 \\ -2a+4b-4c+5=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = \frac{5}{2}, d = 2$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y - 5z + 2 = 0$.

5. Giả sử phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì

$$\begin{cases} A,B,C \in (S) \\ I \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c-2=0 \\ -4a-2c+d+5=0 \\ -2a+d+1=0 \\ -2a-2b-2c+d+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2a-1 \\ -2a-2c+4=0 \\ a+b+c-2=0 \\ -2b-2c+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases}$$

.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

6. Gọi I là tâm mặt cầu, suy ra $I(-2;0;z)$

Do (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên ta có:

$$d(I,(P)) = d(I,(Q)) \Leftrightarrow \frac{|2z+10|}{\sqrt{5}} = \frac{|z-1|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow z = -11, z = -3$$

- $z=-3 \Rightarrow I(-2;0;-3),\ R=\dfrac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ phương trình

$(S):(x+2)^2+y^2+(z+3)^2=\dfrac{16}{5}$

- $z=-11 \Rightarrow I(-2;0;-11),\ R=\dfrac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ phương trình

$(S):(x+2)^2+y^2+(z+11)^2=\dfrac{144}{5}$

Bài 3

1. Giả sử $\left(S\right): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$

Do (S) đi qua A,B,C,D nên ta có hệ: $\begin{cases} 6a+6b+d=-18 \\ 6a+6c+d=-18 \\ 6b+6c+d=-18 \\ 6a+6b+6c+d=-27 \end{cases}$

Giải hệ trên ta tìm được: $a=b=c=-\dfrac{3}{2}; d=0$

Vậy $\left(S\right): x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z=0$.

2. Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(0;-3;3),\ \overrightarrow{AC}=(-3;0;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-9;-9;-9) \Rightarrow \vec{n}=(1;1;1)$ là VTPT của (ABC). Suy ra phương trình $(ABC): x+y+z-6=0$.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Suy ra $\begin{cases} I\in(ABC) \\ IA=IB \\ IB=IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-6=0 \\ b-c=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=2$. Vậy $I(2;2;2)$.

Bài 4

1. Đường thẳng Δ qua điểm $M(-2;1;-1)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta}(1;2;-2)$. Ta có $\overrightarrow{IM}(4;2;2)$ nên $\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}_{\Delta}\right]=(-8;10;6)$, do đó bán kính của mặt cầu là:

$$R=d(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_{\Delta}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{\Delta}\right|}=\frac{\sqrt{(-8)^2+10^2+6^2}}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

Phương trình mặt cầu cần tìm

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\frac{200}{9}.$$

2. Đường thẳng Δ' qua điểm $M(2;-3;0)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta'}(-1;1;1)$. Ta có $\overrightarrow{IM}(1;6;5)$ nên $\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}_{\Delta}\right]=(1;-4;5)$, do đó

$$d(I,\Delta')=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_{\Delta'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{\Delta'}\right|}=\frac{\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=\sqrt{14}.$$

Vì mặt cầu cắt Δ' tại hai điểm A,B nên bán kính mặt cầu được xác định theo công thức $R^2=d^2(I,\Delta')+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=14+36=50$

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình là: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=50.$

3. Đường thẳng d' qua điểm $N(-4;-6;-19)$ và có $\vec{u}_{d'}(3;2;-2)$.

Vì tâm mặt cầu $I\in d$ nên $I(2+t;3+t;-1+2t)$.

Ta có $\overrightarrow{MI}(t;t;21+2t)$, $\overrightarrow{NI}(6+t;9+t;18+2t)$ nên

$$\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]=(6t+54;-8t-66;t+15).$$

Vì mặt cầu qua điểm M và tiếp xúc với d' nên $MI=d(I,d')=R$.

Do đó $MI=\frac{\left|\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{d'}\right|}$, hay

$$\sqrt{t^2+t^2+(21+t)^2}=\frac{\sqrt{(6t+54)^2+(-8t-66)^2+(t+15)^2}}{\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 17(3t^2+42t+441)=101t^2+1734t+7497\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-\frac{102}{5}\end{array}\right..$$

Với $t=0$ thì $I(2;3;-1), R=21$ nên phương trình mặt cầu