HƯỚNG DẪN GIẢI.

Vấn đề 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Bài 1

1. Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4;-4),\overrightarrow{AC}=(2;-3;-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;-5;-1)$

Vì (P) đi qua A,B,C nên (P) nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;-5;-1)$ làm VTPT

Vậy phương trình (P) là: $-8(x-1)-5(y-2)-(z-3)=0$

Hay : $8x+5y+z-21=0$.

2. Gọi M là trung điểm AC, ta có: $M\left(2;\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

Vì (P) là mặt phẳng trung trực đoạn AC nên (P) đi qua M và nhận $\overrightarrow{AC}=(2;-3;-1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình (P) là: $2(x-2)-3\left(y-\frac{1}{2}\right)-1\left(z-\frac{5}{2}\right)=0$

Hay : $2x-3y-z=0$.

3. Ta có $\overrightarrow{MN}=(0;2;-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right]=(-12;-3;-6)$

Vì (P) đi qua M,N và song song với AB nên (P) nhận $\vec{n}=-\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right]=(4;1;2)$ làm VTPT.

Vậy phương trình (P) là: $4x+y+2(z-1)=0\Leftrightarrow 4x+y+2z-2=0$.

4. Gọi A_1,A_2,A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox,Oy,Oz

Ta có $A_1(1;0;0)$, $A_2(0;2;0)$, $A_3(0;0;3)$ nên phương trình (P) là:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-6=0.$$

Bài 2 Xét hai điểm B,C thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (α), (β).

Khi đó tọa độ các điểm B,C thỏa mãn hệ $\begin{cases}x-y+z-4=0\\3x-y+z-1=0\end{cases}$.

Chọn $y=0$ thì $x=-\frac{3}{2},z=\frac{11}{2}\Rightarrow B\left(-\frac{3}{2};0;\frac{11}{2}\right)$.

Chọn $z=0$ thì $x=-\frac{3}{2}, y=-\frac{11}{2} \Rightarrow C\left(-\frac{3}{2};-\frac{11}{2};0\right)$.

Mặt phẳng (P) qua giao tuyến của (α), (β) khi và chỉ khi (P) qua hai điểm B, C.

Chú ý: Nếu chọn giá trị của x (hoặc y, z) mà hệ vô nghiệm thì hai mặt phẳng không cùng đi qua điểm có hoành độ (hoặc tung độ, cao độ) đó. Chẳng hạn, trong bài này, không thể chọn $x \neq -\frac{3}{2}$ vì nếu trừ vế với vế hai phương trình trên, ta luôn có $x=-\frac{3}{2}$.

1. Mặt phẳng (P) là mặt phẳng qua ba điểm A, B, C. Ta có

$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{5}{2};-8;-\frac{7}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}\left(0;-\frac{11}{2};-\frac{11}{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = -\frac{11}{4}(23;-5;5)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$23(x-1)-5(y-8)+5(z-2)=0 \Leftrightarrow 23x-5y+5z+7=0.$$

2. Mặt phẳng (P) vuông góc với (Q) nên $\vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(Q)}$, $\vec{n}_{(P)} \perp \overrightarrow{BC}$ do đó ta có véc tơ pháp tuyến của nó là $\vec{n}_{(P)} = \left[\vec{n}_{(Q)}, \overrightarrow{BC}\right] = -\frac{11}{2}(7;-1;1)$.

Mặt phẳng (P) cần tìm là $7x-y+z+5=0$.

3. Giả sử véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}(A;B;C)$. Vì (P) qua B, C nên $\vec{n}_{(P)}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow C=-B$. Vậy $\vec{n}_{(P)}(A;B;-B)$.

Ta có $\frac{1}{\sqrt{33}} = \cos\varphi = \frac{|A.1+B.2+(-B).(-2)|}{\sqrt{A^2+B^2+(-B)^2}.3}$, do đó

$$3(A^2+2B^2)=11(A+4B)^2 \Leftrightarrow 4A^2+44AB+85B^2=0$$

$$\Leftrightarrow (2A+5B)(2A+17B)=0 \Rightarrow A=-\frac{5}{2}B,\ A=-\frac{17}{2}B.$$

Nếu $A=-\frac{5}{2}B$ thì chọn $B=-2 \Rightarrow A=5, C=2$ nên

$$(P):\ 10x-4y+4z-7=0.$$

Nếu $A=-\frac{17}{2}B$ thì chọn $B=-2 \Rightarrow A=17, C=2$ nên

$$(P):\ 34x-4y+4z+29=0.$$

Bài 3

1. Ta có $\vec{n}=(1;-2;3)$ là VTPT của (P)

Vì $(\alpha)//(P)$ nên $\vec{n}=(1;-2;3)$ cũng là VTPT của (α).

Vậy phương trình (α) là: $x-2y+3z+1=0$.

2. Ta có $\vec{a}=(1;1;1)$ là VTPT của (β), $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;-4)$.

Suy ra $\left[\vec{a},\overrightarrow{AB}\right]=(-1;1;0)$

Vì (α) đi qua A,B và $(\alpha)\perp(\beta)$ nên (α) nhận $\vec{n}=\left[\vec{a},\overrightarrow{AB}\right]=(-1;1;0)$ làm VTPT

Vậy phương trình (α) là: $x-y-1=0$.

3. Vì (α) chứa trục Ox và vuông góc với (Q) nên (α) nhận $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{i}\right]$ làm VTPT

Trong đó $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{a}=(2;3;-1)$ là VTPT của (Q) nên $\vec{n}=(0;1;3)$

Vậy phương trình (α) là: $y+3z=0$.

4. Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB}(16;6;-5),\overrightarrow{AC}(10;0;-2)$ nên

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-12;-18;-60)=-6(2;3;10)$$

Do đó (α) là mặt phẳng đi qua $A(2;8;5)$ và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(2;3;10)$ nên có phương trình

$$2(x-2)+3(y-8)+10(z-5)=0\Leftrightarrow 2x+3y+10z-78=0.$$

Vậy (α): $2x+3y+10z-78=0$.

Cách 2: Gọi mặt phẳng (α) cần tìm có phương trình là

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Mặt phẳng (α) qua ba điểm $A(2;8;5),B(18;14;0),C(12;8;3)$ nên

$$\begin{cases}2A+8B+5C+D=0\\18A+14B+D=0\\12A+8B+3C+D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}18A+14B+D=0\\16A+6B-5C=0\\6A+6B-3C=0\end{cases}$$

Từ đó ta tính được $C=5A,2B=3A,D=-39A$.

Do $A^2+B^2+C^2>0$ nên chọn $A=2$ thì $B=3;C=10,D=-78$, hay phương trình mặt phẳng cần tìm là (α): $2x+3y+10z-78=0$.

5. Gọi I là trung điểm của EF, ta có $I(3;5;4),\overrightarrow{EF}(-4;6;-6)$.

Mặt phẳng trung trực của EF là mặt phẳng đi qua I và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{EF}(-4;6;-6)$, phương trình của (α)

$$-4(x-3)+6(y-5)-6(z-4)=0\Leftrightarrow 2x-3y+3z-3=0.$$

Vậy (α): $2x-3y+3z-3=0.$

6. Phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x=0 \Rightarrow \vec{n}_{(Oyz)}(1;0;0).$

Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (Oyz) nên cũng có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Oyz)}(1;0;0)$, nên phương trình của mặt phẳng (α) là

$$1.(x-2)+0.(y-3)+0.(z-5)=0 \Leftrightarrow x-2=0.$$

Vậy (α): $x-2=0.$

7. Ta có $\vec{n}_{(\beta)}(1;2;-5), \vec{n}_{(\gamma)}(2;-3;-1).$

Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta),(\gamma)$ nên

$$\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\vec{n}_{(\beta)},\vec{n}_{(\gamma)}\right]=(-17;-9;-7).$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là

$$-17(x-1)-9(y+3)-7(z-2)=0 \Leftrightarrow 17x+9y+7z-4=0.$$

Vậy (α): $17x+9y+7z-4=0.$

8. Hình chiếu của điểm $H(-2;1;5)$ lên các trục Ox,Oy,Oz lần lượt là $M(-2;0;0), N(0;1;0), P(0;0;5).$ Phương trình mặt phẳng (MNP) là

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{5}=1 \Leftrightarrow 5x-10y-2z+10=0.$$

Vậy (α): $5x-10y-2z+10=0.$

Bài 4 .

1. Ta có $\overrightarrow{n_Q}=(1;1;3)$ là một VTPT của (Q). Vì $(P)//(Q)$ nên (P) có một VTPT

$\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}=(1;1;3)$. Vậy (P) có phương trình là :

$$1(x-1)+1(y-2)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y+3z-6=0.$$

2. Vì (P) đi qua M,N,E nên $\vec{n}=[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}]=(-1;-2;0)$ là một VTPT của (P).

Vậy phương trình của (P) : $x+2y=0$.

3. Gọi I là trung điểm của $MN \Rightarrow I(0;1;\frac{3}{2})$. Vì (P) là mp trung trực của đoạn MN nên (P) đi qua I và nhận $\overrightarrow{MN}=(0;0;-1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình $(P): 2z-3=0$.

4. Tọa độ hình chiếu của A lên các trục tọa độ là

$A_1(1;0;0), A_2(0;2;0), A_3(0;0;3)$.

Áp dụng phương trình đoạn chắn ta có phương trình của mp(P) là:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-6=0.$$

5. Vì (P) đi qua B, C và vuông góc với (R) ((R) có $\overrightarrow{n_R}=(1;1;1)$ là một VTPT)

Nên (P) nhận $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{n_R}\right]=(0;1;-1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình $(P): y-z-2=0$.

6. Ta có $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{n_\beta}=(0;1;-1)$ lần lượt là VTPT của $(\alpha), (\beta)$.

Vì (P) vuông góc với hai (α) và (β) nên $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}\right]=(0;1;1)$ là VTPT của (P)

Vậy phương trình $(P): y+z-5=0$.

Bài 5

1. Giả sử (α) cắt trục Oz tại điểm $M(0;0;t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2;2;1)$, $\overrightarrow{AM}(-3;0;t)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right]=(2t;2t-3;6)$.

Vì thế $S_{ABM}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(2t)^2+(2t-3)^2+6^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8t^2-12t+45}$.

Theo bài ra $S_{ABM}=\frac{9}{2}$, nên $\sqrt{8t^2-12t+45}=9 \Leftrightarrow 8t^2-12t-36=0$, hay $t=3;\ t=-\frac{3}{2}$.

- Với $t=3$ thì $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right]=(6;3;6)$ nên phương trình $(\alpha): 2x+y+2z-6=0$.
- Với $t=-\frac{3}{2}$ thì $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right]=(-3;-6;6)$ nên phương trình $(\alpha): x+2y-2z-3=0$.

2. Giả sử (α) cắt trục Oy tại điểm $N(0;t;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2;2;1)$, $\overrightarrow{AC}(-1;-1;2)$, $\overrightarrow{AN}(-3;t;0)$ nên

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]=(5;3;4) \Rightarrow V_{ABCN}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AN}\right|=\frac{1}{2}|t-5|.$$

Vì thế $\frac{1}{2}|t-5|=12 \Leftrightarrow |t-5|=24 \Rightarrow t=29;\ t=-19$.