HƯỚNG DẪN GIẢI.

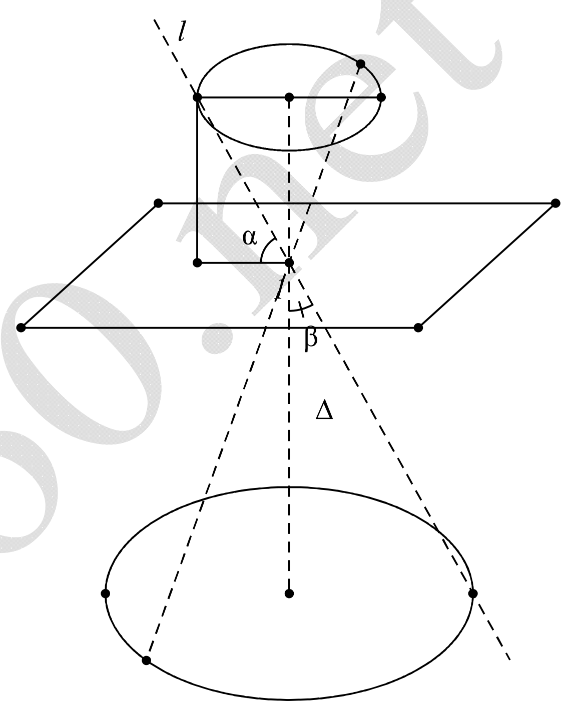
Vấn đề 1. CHỨNG MINH HỆ ĐIỂM THUỘC MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU.

Bài 1

1.

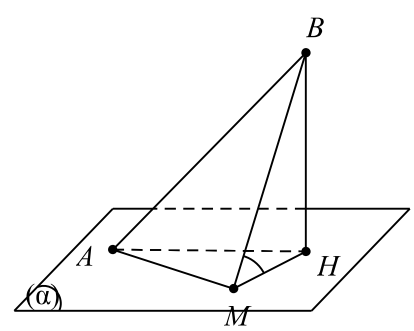
Qua O kẻ đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cố định. Gọi β là góc giữa Δ và l.

Ta có $\beta = 90^0 - \alpha$ không đổi nên đường thẳng l thuộc mặt nón cố định có trục là Δ, đỉnh là I và góc ở đỉnh là $2\beta = 180^0 - 2\alpha$.



2.

Gọi K là hình chiếu của M lên AB, ta có hai tam giác vuông MKB và MHB bằng nhau suy ra $MK = MH$ không đổi. Vậy điểm M luôn nằm trên mặt trụ có trục là AB và bán kính $r = BH$.



3. Gọi O, R là tâm và bán kính mặt cầu và AM là một đường thẳng bất kỳ qua A và tiếp xúc với mặt cầu tại M. Đặt $OAM = \alpha, OA = a$

hoc360.net

Ta có : $\tan\alpha = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{R}{a}$ không đổi nên α không đổi.

Vậy AM luôn nằm trên một mặt nón có trục là OA, đỉnh A và góc ở đỉnh là 2α.

4. Gọi H là chân đường cao hạ từ M xuống đường thẳng AB. Ta có diện tích tam giác MAB là $S = \dfrac{1}{2}MH.AB \Rightarrow MH = \dfrac{2S}{AB}$ không đổi.

Vậy M thuộc mặt trụ cố định có trục là đường thẳng AB, bán kính $r = MH = \dfrac{2S}{AB}$.

Bài 2

1. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Ta chứng minh được $AD \perp BC$. Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC, BD, AC.

Ta có $\begin{cases} NP//MQ//AC \\ MP//NQ//BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow MPNQ$ là hình chữ nhật nên giao điểm O của MN và PQ cách đều bốn điểm M, N, P, Q.

Tương tự ta cũng có O cách đều bốn điểm M, N, E, F

Vậy O cách đều sáu điểm M, N, P, Q, E, F nên sáu điểm này nằm trên mặt cầu tâm O.

2. Ta có $AN \perp SC.$ Từ $AM \perp BC, AM \perp SC$ ta có $AM \perp MC.$

Tương tự $AP \perp PC.$

Do đó các điểm B, D, M, N, P cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông.

Vậy A, B, C, D, M, N, P thuộc mặt cầu tâm O có bán kính là $r = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

3. Gọi $F = KL \cap MN, E$ là giao điểm của PF với mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $PABC$. Khi đó các điểm P, Q, R, E nằm trên đường tròn là thiết diện của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $PABC$ với mặt phẳng (PKL).

Mặt khác $F = KL \cap MN \Rightarrow P, S, T, E$ nằm trên đường tròn thiết diện cảu mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $PACD$ với mặt phẳng (PMN).

Do đó các điểm P, Q, R, S, T nằm trên hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm P, E nên hai đường tròn này nằm trên một mặt cầu.

Bài 3

1. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Ta có: $(Q) \perp SC \Rightarrow AC' \perp SC \Rightarrow AC'C = 90^0$ (1)

$$SA \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp BC \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AB' \perp BC.$$

$SC \perp (Q) \Rightarrow SC \perp AB' \Rightarrow AB' \perp (SBC)$

$\Rightarrow AB' \perp B'C \Rightarrow AB'C = 90^0$ (2).

Chứng minh tương tự ta có : $AD'C = 90^0$ (3).

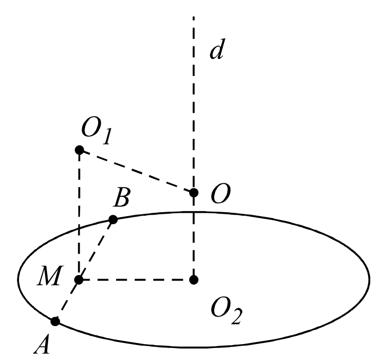
Ta lại có $ABC = ADC = 90^0$ (4).

Từ (1), (2), (3) và (4) ta suy ra bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông nên chúng thuộc mặt cầu cố định có đường kính là AC. Bán kính hình cầu: $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

2. Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow \begin{cases} O_1M \perp AB \\ O_2M \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (O_1O_2M)$

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua O_1 và vuông góc với mặt phẳng chứa (O_1), d_2 là đường thẳng đi qua O_2 và vuông góc với mặt phẳng chứa (O_2).

Vì $d_1, d_2 \subset (O_1O_2M)$ nên $d_1 \cap d_2 = \{O\}$.

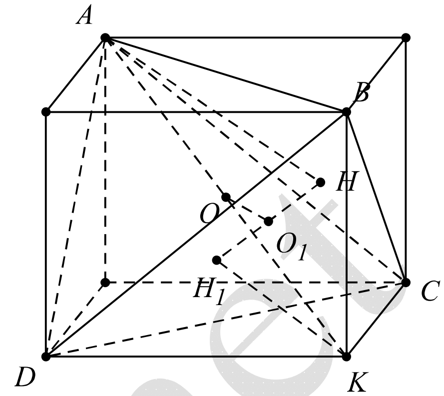


Khi đó mọi điểm N nằm trên (O_1) hoặc (O_2) ta luôn có $ON = OA = OB$. Do đó tất cả các điểm nằm trên hai đường tròn (O_1) và (O_2) đều thuộc mặt cầu (O, OA).

Bài 4

1. Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện, AH là đường cao cuả hình chóp, H_1, O_1 là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Trước hết ta chứng minh O_1 là trung điểm đoạn HH_1



Ta lấy hình hộp chữ nhật ngoại tiếp tứ diện $ABCD$

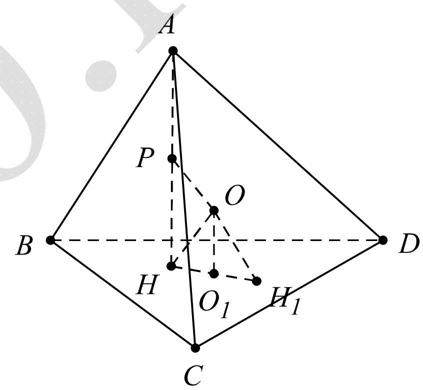
Ta có O là trung điểm của AK, $KBCD$ là tứ diện vuông và H_1 là trực tâm tam giác BCD nên $KH_1 \perp (BCD)$, do đó hình chiếu O_1 của O xuống mặt phẳng (BCD) là trung điểm đoạn HH_1.

Từ đó suy ra $OH = OH_1$.

Gọi P là trung điểm AH, ta có $AH = 4OO_1$ nên $OP = OH$

Đặt $r = OO_1, a = O_1H_1$, ta có:

$OH = OP = OH_1 = \sqrt{r^2 + a^2}$.



Tương tự ta chứng minh được 12 điểm nói trong bài toán nằm trên mặt cầu tâm O, bán kính $R = \sqrt{r^2 + a^2}$.

Vấn đề 2. CÁC BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH XUNG QUANH, THỂ TÍCH VÀ THIẾT DIỆN CỦA KHỐI NÓN, KHỐI TRỤ.

Bài 1

1. a) Gọi S, O là đỉnh và tâm đường tròn đáy của hình nón, thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB. Theo bài ra ta có ΔSAB là tam giác vuông cân tại S.

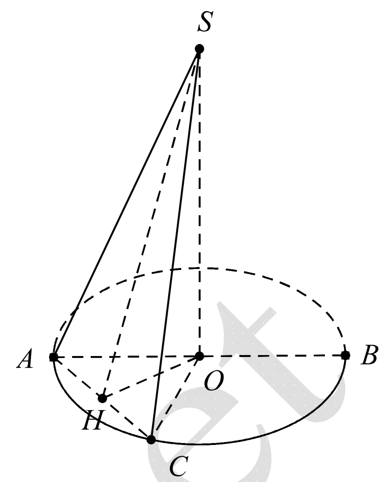
Ta có $l = SA = a$; $AB = 2r = \sqrt{2}SB = \sqrt{2}a \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Diện tích toàn phần của hình nón là:

$S_{tp} = \pi r(r + l) = \dfrac{(1+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$.

Thể tích khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

b).Xét thiết diện qua đỉnh S tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0 là ΔSAC. Gọi H là trung điểm của AC.



Ta có: $AC \perp OH, AC \perp SO \Rightarrow AC \perp (SOH) \Rightarrow \widehat{SHO} = 60^0$.

$SH = \dfrac{SO}{\sin 60^0} = \dfrac{\sqrt{6}a}{3}, AC = 2AI = 2\sqrt{SA^2 - SH^2} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Diện tích thiết diện là: $S_{SAC} = \dfrac{1}{2} SH.AC = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$.

2. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Gọi I là điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp của tam giác ABC với cạnh BC;

$\widehat{SIO} = \beta; h = SO = r\tan\beta, l = SI = \dfrac{r}{\cos\beta}$.

a) Diện tích xung quanh hình nón $S_{hn} = \pi r l = \dfrac{\pi r^2}{\cos\beta}$.

Thể tích hình nón $V_{kn} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi r^3 \tan\beta}{3}$.

b) Ta có $AC = \sqrt{3}AB, BC = 2AB; S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{\sqrt{3}AB^2}{2}$

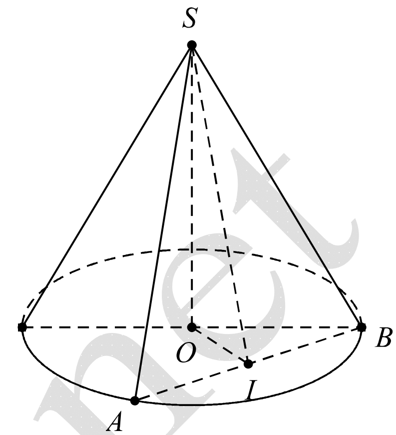
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}(AB + AC + BC)r = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}AB.r \Rightarrow AB = (\sqrt{3}+1)r$.

Diện tích xung quanh hình chóp

$S_{hc} = \dfrac{1}{2}(AB + AC + BC).SI = \dfrac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})r^2}{\cos\beta}$.

Thể tích khối chóp $V_{kc} = \frac{1}{3} SO.S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})r^3 \tan\beta}{3}$.

3. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB thì $OI \perp AB, SI \perp AB$, $OI = a$



Ta có $AO = SA.\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.SA$;

$AI = SA\cos 60^0 = \frac{1}{2}SA$.

Từ đó suy ra $\frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta lại có $\frac{AI}{AO} = \cos IAO$

$\Rightarrow \sin IAO = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{a}{OA} \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{6}a}{2}$

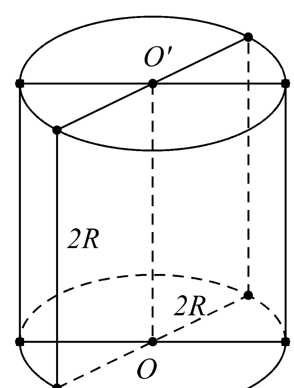
Xét tam giác SAO, ta có $SA = \frac{AO}{\cos 30^0} = \sqrt{2}a$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \sqrt{3}\pi a^2$.

Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^3$.

Bài 2

1. Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có $h = 2R$.



Diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2\pi Rh = 4\pi R^2$ (đvdt).

Diện tích toàn phần là : $S_{tp} = 2\pi R(R+h) = 6\pi R^2$ (đvdt)

2. Thể tích khối trụ $V = \pi R^2 h = 2\pi R^3$ (đvtt).

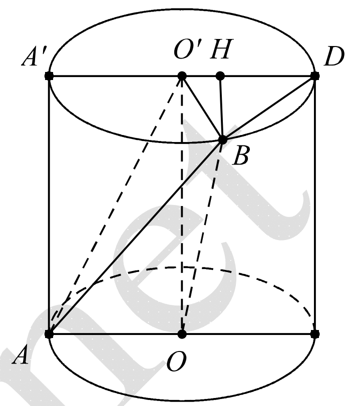
3. Do khối lăng trụ nội tiếp là tứ giác đều nên đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{2}R$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = Bh = 4R^3$ (đvtt).

Bài 4

Kẻ đường sinh AA', gọi D là điểm đối xứng với A' qua tâm O' và H là hình chiếu của B trên $A'D$.

Ta có $BH \perp (AOO'A')$ nên $V = \frac{1}{3}BH.S_{AOO'}$.



Ta có $A'B = \sqrt{3}a, BD = a$, tam giác $BO'D$ đều

suy ra $BH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Mặt khác $S_{AOO'} = \frac{1}{2}a^2$ nên suy ra

Thể tích tứ diện $OO'AB$ là $V_{OO'AB} = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Bài 5 *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

1. Ta có $SM = \frac{OM}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha}, SO = R\cot\alpha$.

Diện tích xung quanh khối nón $S_{xq} = \frac{\pi R^2}{\sin\alpha}$.

Thể tích khối nón $V = \frac{\pi R^3 \cot\alpha}{3}$.

2. Giả sử (P) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SMN.

Ta có $SM \perp SN \Rightarrow S_{td} = \frac{1}{2}SM.SN = \frac{R^2}{2\sin^2\alpha}$.

3. Gọi I là trung điểm của MN, ta có $SIO = \beta$.

Ta có $OI = SO\cot\beta = R\cot\alpha.\cot\beta$ không đổi.

Vậy SI thuộc một mặt nón cố định có đỉnh S, trục SO và đường tròn đáy $(O; OI)$.

Bài 6

Gọi E là trung điểm của BC, D đối xứng của A qua O.